А.Эрдейи

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Книга посвящена изложению различных методов асимптотического вычисления интегралов, содержащих большой параметр, и методов решения дифференциальных уравнений с помощью асимптотических разложений. Изложение сопровождается примерами. Книга будет полезна широкому кругу читателей, сталкивающихся в своей деятельности с приближенными вычислениями (физикам, инженерам и т. д.), а также студентам и аспирантам, специализирующимся в области вычислительной математики и теории дифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга написана на основе курса лекций, прочитанных автором осенью 1954 года в Калифорнийском технологическом институте. Основной целью курса было изложение различных методов асимптотического вычисления интегралов, содержащих большой параметр, а также методов решения дифференциальных уравнений с помощью асимптотических разложений. Выбор столь широкой области вопросов привел к тому, что изложение приняло несколько эскизный характер.

Глава I содержит краткое введение в общую теорию асимптотических разложений. Эта теория изложена лишь в пределах, необходимых для того, чтобы дать теоретическое обоснование главной части курса; эта скромная глава никоим образом не может заменить систематического и полного изложения рассматриваемого вопроса, данного недавно ван дер Корпутом.

В главе II изложены наиболее важные методы асимптотического вычисления функций, заданных в виде определенных интегралов. Эта глава многим обязана прекрасной брошюре Копсона, посвященной данному вопросу. Из-за недостатка времени мы дали лишь краткое изложение некоторых из методов асимптотического вычисления (интегрирование по частям, метод Лапласа, метод перевала, метод стационарной фазы) и совсем не затронули вопросов, связанных с двойными и кратными интегралами.

Последние две главы посвящены решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В главе III «большой» величиной, по которой ведется асимптотическое разложение,

является независимое переменное. Изложение ограничено рассмотрением дифференциальных уравнений второго порядка, для которых бесконечно удаленная точка является иррегулярной особой точкой первого ранга, а определяющее уравнение имеет два различных корня. В главе IV «большой» величиной является параметр в дифференциальном уравнении. Изложение ограничено рассмотрением дифференциальных уравнений второго порядка в вещественной области, причем аргумент пробегает ограниченный замкнутый интервал. Даны оба приближения Лиувилля и различные их обобщения на случай, когда интервал содержит точку перехода.

Декабрь 1955 г. *А. Эрдейи*

ВВЕДЕНИЕ

Часто бывает так, что для вычисления некоторой величины можно использовать расходящийся бесконечный ряд, причем сама величина в некотором смысле является суммой этого ряда. Типичная ситуация такова: некоторая функция разлагается в функциональный ряд, причем приближение, даваемое несколькими первыми членами ряда, тем лучше, чем ближе независимое переменное к некоторому предельному значению (таким значением часто является ∞). Во многих случаях члены ряда сначала быстро убывают (тем быстрее, чем ближе независимое переменное к предельному значению), но потом члены ряда вновь начинают возрастать. Такие ряды иногда называют *полусходящимися* (Стилтьес), а вычислители часто говорят о *сходящихся в начале* рядах (Эмде); однако в математической литературе, как правило, применяется название *асимптотические ряды* (Пуанкаре). Мы увидим ниже, что асимптотические ряды могут как сходиться, так и расходиться.

Рассмотрим пример, исследованный впервые Эйлером (1754). Очевидно, что ряд

$$S(x) = 1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n n! x^n \quad (1)$$

расходится при всех $x \neq 0$. Однако при малых значениях x (скажем, $x = 10^{-12}$) члены ряда сначала весьма быстро убывают и можно вычислить приближенное численное значение $S(x)$. Возникает вопрос: какую функцию представляют приближенно эти численные значения?

Введем, следуя Эйлеру, функцию $\varphi(x) = xS(x)$. Формально дифференцируя ряд (1), получим

$$\varphi'(x) = 1! - 2!x + 3!x^2 - \ldots = \frac{x - \varphi(x)}{x^2},$$

откуда имеем

$$x^2\varphi'(x)+\varphi(x)=x.$$

Таким образом, $\varphi(x)$ можно истолковать как решение этого дифференциального уравнения, обращающееся в нуль при $x=0$. С другой стороны, используя эйлеров интеграл второго рода

$$n!=\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt,$$

получаем

$$S(x)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt-x\int_0^\infty e^{-t}t\,dt+x^2\int_0^\infty e^{-t}t^2\,dt-\ldots=$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^n\int_0^\infty e^{-t}(xt)^n\,dt.$$

Если просуммировать формально под знаком интеграла, то функция $S(x)$ примет вид

$$\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt. \tag{2}$$

Но функция

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \tag{3}$$

является вполне определенной аналитической функцией от x в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной действительной полуоси, причем эта функция тесно связана с так называемой интегральной показательной функцией $\mathrm{Ei}(x)$. Возникает вопрос: в каком смысле расходящийся ряд (1) представляет функцию (3)? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что при $m=0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{1+xt}=\sum_{n=0}^m(-xt)^n+\frac{(-xt)^{m+1}}{1+xt}$$

и, следовательно,

$$f(x)=S_m(x)+R_m(x), \tag{4}$$

где

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n n!\, x^n \tag{5}$$

— частичная сумма ряда (1), а

$$R_m(x) = (-x)^{m+1} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{m+1} dt}{1+xt} \tag{6}$$

— его остаточный член.

Если $\operatorname{Re} x \geqslant 0$, то

$$|1+xt|^{-1} \leqslant 1$$

и

$$|R_m(x)| \leqslant (m+1)!\, |x|^{m+1}, \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} x \geqslant 0. \tag{7}$$

С другой стороны, если $\operatorname{Re} x < 0$, $\varphi = \arg x$ и $\pi/2 < \pm\varphi < \pi$, то

$$|1+xt|^{-1} \leqslant |\operatorname{cosec} \varphi|,$$

и

$$|R_m(x)| \leqslant (m+1)!\, |x|^{m+1} |\operatorname{cosec} \varphi|, \quad \text{где } \operatorname{Re} x < 0. \tag{8}$$

В обоих случаях остаточный член имеет тот же порядок, что и первый отброшенный член ряда $S(x)$, и быстро стремится к нулю, когда $x \to 0$. Сходимость равномерна в любом секторе $|\arg x| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если $\operatorname{Re} x \geqslant 0$, то остаточный член меньше по модулю первого отброшенного члена, причем если $x > 0$, то остаток имеет тот же знак, что и первый отброшенный член. Таким образом, при $x > 0$ ряд (1) ведет себя подобно сходящимся знакочередующимся рядам, за исключением того, что остаточный член не стремится к нулю. Минимальное значение погрешности определяется наименьшим членом ряда (1) (получающимся, когда m примерно равно x).

Теория асимптотических рядов ведет начало от Стилтьеса (1886) и Пуанкаре (1886). Эту теорию можно разбить на две части. В одной из них, теории асимптотических *рядов*, изучаются такие вопросы, как «суммы» асимптотических рядов («асимптотические пределы», «асимптотическая сходимость») и операции над асимптотическими рядами (алгебраические операции, дифференцирование, интегрирование, под-

становка асимптотических разложений переменного в асимптотические и сходящиеся ряды, содержащие это переменное, и тому подобное). Наиболее полное изложение этой теории можно найти в лекциях ван дер Корпута (1951, 1952) и его текущих работах. В этой книге мы ограничимся кратким введением в теорию асимптотических рядов, обратив основное внимание на другую часть изучаемого вопроса — теорию асимптотических *разложений*. Центральной темой является здесь построение и изучение рядов, асимптотически представляющих данные функции. Эти функции часто задаются интегральными представлениями или степенными рядами либо возникают как решения дифференциальных уравнений; в последнем случае переменное, по которому производится асимптотическое разложение, является либо независимым переменным в дифференциальном уравнении, либо входящим в это уравнение параметром.

ЛИТЕРАТУРА

van der Corput J. G., Asymptotic expansions, Parts I and II, National Bureau of Standards (Working Paper), 1951.

van der Corput J. G., Asymptotic expansions, Part III, National Bureau of Standards (Working Paper), 1952.

van der Corput J. G., Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam, Proc. 57, 206—217, 1954a.

van der Corput, J. G., Asymptotic Expansions I, Fundamental theorems of Asymptotics, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1954b.

Euler Leonhard, Novi commentarii ac. sci. Petropolitanae 5, 205—237. Opera omnia, ser. I, 14, 585—617, in particular, 601 ff, 1754.

Poincaré H., Acta Math. 8, 295—344, 1886.

Stieltjes Th., Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) 3, 201—258, 1886.

ГЛАВА I

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1.1. *O*-символика

Как правило, под независимым переменным мы будем понимать вещественное или комплексное переменное; но в этой главе, если не оговорено противное, x означает переменный элемент топологического T_2-пространства (хаусдорфова пространства). Обозначим через R множество значений, принимаемых переменным x, а через x_0 некоторую предельную точку множества R (которая может и не принадлежать R). Символы $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и аналогичные им обозначают функции от x, определенные на множестве R и принимающие вещественные или комплексные значения.

Мы будем применять следующие обозначения. Если существует постоянная A (то есть число, не зависящее от x), такая что $|\varphi| \leqslant A|\psi|$ для всех $x \in R$, мы будем писать $\varphi = O(\psi)$. Если существует такая постоянная A и окрестность U точки x_0, что $|\varphi| \leqslant A|\psi|$ для всех x, принадлежащих $U \cap R$, мы будем писать $\varphi = O(\psi)$ при $x \to x_0$. Аналогично, мы будем писать $\varphi = o(\psi)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U_ε точки x_0, что $|\varphi| \leqslant \varepsilon|\psi|$ для всех x, принадлежащих $U_\varepsilon \cap R$. Если на множестве R функция ψ не обращается в нуль, то эти три условия можно сформулировать проще: $\varphi = O(\psi)$ в R (при $x \to x_0$ в R), если φ/ψ ограничено в R (при $x \to x_0$ в R); $\varphi = o(\psi)$ при $x \to x_0$, если $\varphi/\psi \to 0$ при $x \to x_0$ в R. Соотношения $\varphi = O(\psi)$ и $\varphi = o(\psi)$ мы будем называть ***соотношениями порядка.***

В следующих примерах x является комплексным переменным, а S_Δ — областью: $0 < |x| < \infty$, $|\arg x| < \pi/2 - \Delta$.

(I) $e^{-x}=O(x^{\alpha})$, $e^{-x}=o(x^{\alpha})$, если $x\to\infty$ в S_{Δ}, $\Delta>0$, α произвольно; эти соотношения не выполняются (при любом α), если $\Delta\leqslant 0$.

(II) $e^{-x}=O(x^{\alpha})$, если $x\to\infty$ в S_0, при условии, что $\operatorname{Re}\alpha\geqslant 0$; в области $\operatorname{Re}\alpha<0$ это соотношение не имеет места.

(III) $e^{-x}=O(x^{\alpha})$ в S_{Δ}, если либо $\Delta>0$ и $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, либо $\Delta=0$ и $\operatorname{Re}\alpha=0$.

Читатель без труда докажет сформулированные выше утверждения.

Если функции, входящие в соотношения порядка, зависят от параметров, то, вообще говоря, постоянная A и окрестности U, U_{ε}, входящие в определения, зависят от этих параметров. Если A, U, U_{ε} могут быть выбраны независимо от параметров, то говорят, что соотношения порядка выполняются *равномерно* относительно этих параметров.

Операции с соотношениями порядка выполняются по некоторым простым правилам. Мы приведем наиболее часто встречающиеся правила для O-символа; соответствующие правила справедливы и для o-символа. В указанных ниже правилах R и x_0 фиксированы, и слова «при $x\to x_0$» опускаются.

Если $\varphi=O(\psi)$ и $\alpha>0$, то

$$|\varphi|^{\alpha}=O(|\psi|^{\alpha}). \tag{1}$$

Если $\varphi_i=O(\psi_i)$, $i=1, 2, \ldots, k$, и α_i — постоянные, то

$$\sum_i \alpha_i\varphi_i=O\Big(\sum_i|\alpha_i||\psi_i|\Big). \tag{2}$$

Эти соотношения выполняются также для бесконечных рядов при условии, что $\varphi_i=O(\psi_i)$ равномерно по i. В случае бесконечных рядов равенство (2) и аналогичные соотношения имеют следующий смысл. Если ряд $\sum|\alpha_i\psi_i|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\alpha_i\varphi_i$, причем выполнено соотношение (2); если же ряд $\sum|\alpha_i\psi_i|$ расходится, то о ряде $\sum\alpha_i\varphi_i$ ничего не утверждается.

Если $\varphi_i=O(\psi_i)$, $i=1, 2, \ldots, k$; α_i — постоянные и $|\psi_i|\leqslant\psi$ при $i=1, 2, \ldots, k$ для всех x, принадлежащих пересечению множества R и некоторой окрестности U_0 точки x_0, то

$$\sum_i \alpha_i\varphi_i=O(\psi). \tag{3}$$

Это соотношение справедливо для бесконечных рядов при условии, что $\varphi_i = O(\psi_i)$ равномерно по i и $\sum|\alpha_i| < \infty$.

Если $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, \ldots, k$, то

$$\prod_i \varphi_i = O(\prod_i \psi_i). \tag{4}$$

Доказательство соотношения (1) очевидно. Для того чтобы доказать соотношение (2), возьмем числа A_i и окрестности U_i точки x_0, соответствующие функциям φ_i. Если число этих функций конечно, то существует число A, большее, чем все числа A_i и окрестность U, содержащаяся во всех окрестностях U_i. Тогда, если x принадлежит $U \cap R$, выполняется неравенство

$$|\sum \alpha_i \varphi_i| \leqslant \sum |\alpha_i| A_i |\psi_i| \leqslant A \sum |\alpha_i| |\psi_i|,$$

чем и доказано соотношение (2). Если множество функций φ_i бесконечно, то существование A и U вытекает из равномерности соотношений порядка по i. Соотношение (3) может быть выведено из (2), так как при сделанных предположениях можно выбрать окрестность U так, чтобы она принадлежала и U_0, а тогда

$$A \sum |\alpha_i| |\psi_i| \leqslant A \sum |\alpha_i| \psi = A_1 \psi,$$

где $A_1 = A \sum |\alpha_i|$ — постоянная. Доказательство (4) аналогично доказательству (2).

Соотношения порядка можно ***интегрировать*** как по независимому переменному, так и по параметрам. Ради простоты ограничимся интегралами по вещественным переменным, однако полученные результаты можно распространить на комплексные и абстрактные переменные.

Пусть x — вещественное переменное, R — интервал $a < x < b$, и $\varphi = O(\psi)$ при $x \to b$. Если функции φ и ψ измеримы в R, то

$$\int_x^b \varphi(t)\,dt = O\left(\int_x^b |\psi(t)|\,dt\right) \text{ при } x \to b. \tag{5}$$

Доказательство. Если $\int\limits_x^b |\psi(t)|\,dt = \infty$, то утверждение очевидно. Если $\int\limits_x^b |\psi|\,dt < \infty$ для некоторого x, то существуют такие числа A и X, что

$$\int\limits_x^b |\psi|\,dt < \infty \quad \text{и} \quad |\varphi(x)| \leqslant A|\psi(x)| \quad \text{при} \quad X < x < b,$$

а тогда

$$\left|\int\limits_x^b \varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_x^b |\varphi(t)|\,dt \leqslant A\int\limits_x^b |\psi(t)|\,dt \quad \text{при} \quad X < x < b.$$

Пусть x — переменный элемент множества R в хаусдорфовом пространстве, y — вещественный параметр, $\alpha < y < \beta$ и $\varphi(x, y) = O(\psi(x, y))$ равномерно по y, когда $x \to x_0$. Если для любого фиксированного x в R φ и ψ являются измеримыми функциями от y в интервале $\alpha < y < \beta$, то

$$\int\limits_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dy = O\Bigl(\int\limits_\alpha^\beta |\psi(x, y)|\,dy\Bigr) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{6}$$

Доказательство аналогично доказательству соотношения (5). Пользуясь равномерностью O-символа, можно выбрать A и U, не зависящие от y так, что $|\varphi < A|\psi|$. Интегрируя это неравенство по y, мы приходим к соотношению (6).

Вообще говоря, недопустимо *дифференцирование* соотношений порядка как по независимому переменному, так и по параметрам. Однако некоторые общие результаты о дифференцировании соотношений порядка имеют место в случае аналитических функций комплексного переменного (см. п. 1.6).

В заключение этого пункта приведем некоторые формулы, касающиеся комбинирования соотношений порядка:

$$O(O(\varphi)) = O(\varphi), \tag{7}$$

$$O(o(\varphi)) = o(O(\varphi)) = o(o(\psi)) = o(\psi), \tag{8}$$

$$O(\varphi)\,O(\psi) = O(\varphi\psi), \tag{9}$$

$$O(\varphi)\,o(\psi) = o(\varphi)\,o(\psi) = o(\varphi\psi), \tag{10}$$

$$O(\varphi) + O(\varphi) = O(\varphi) + o(\varphi) = O(\varphi), \tag{11}$$

$$o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi). \tag{12}$$

Эти очевидные формулы могут быть распространены на комбинации любого конечного числа O- и o-символов.

При ссылках на приведенные правила мы будем указывать номер соотношения, выражающего окончательный вывод, причем тот же самый номер будет употребляться для соответствующего правила относительно o-символа. Например, соотношение (1) указывает либо правило, что из $\varphi = O(\psi)$ и $\alpha > 0$ вытекает $|\varphi|^\alpha = O(|\psi|^\alpha)$, либо правило, что из $\varphi = o(\psi)$ и $\alpha > 0$ вытекает $|\varphi|^\alpha = o(|\psi|^\alpha)$.

1.2. Асимптотические последовательности

В этом пункте R, x, x_0, φ имеют тот же самый смысл, что и в п. 1.1. Конечная или бесконечная последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ сокращенно будет обозначаться $\{\varphi_n\}$.

Последовательность функций $\{\varphi_n\}$ называется асимптотической последовательностью при $x \to x_0$ в R, если для всех n функции φ_n определены в R и $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$ при $x \to x_0$ в R.

Если последовательность бесконечна и $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$ равномерно по n, то $\{\varphi_n\}$ называется *асимптотической последовательностью, равномерной по n*. Если φ_n зависит от параметров и $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$ равномерно относительно параметров, то $\{\varphi_n\}$ называется *асимптотической последовательностью, равномерной по параметрам*.

Приведем некоторые примеры асимптотических последовательностей. В этих примерах x — комплексное переменное; R, за исключением особо оговоренных случаев, — комплексная плоскость и S_Δ — область, определенная в п. 1.1.

$$\text{(I)} \quad \{(x - x_0)^n\}, \quad x \to x_0;$$

$$\text{(II)} \quad \{x^{-n}\}, \quad x \to x_0;$$

$$\text{(III)} \quad \{x^{-\lambda_n}\}, \quad x \to \infty \text{ в } S_\Delta,$$

где $\operatorname{Re}\lambda_{n+1} > \operatorname{Re}\lambda_n$ для всех n;

$$\text{(IV)} \quad \{x^{-\lambda_n}\}, \qquad x \to \infty,$$

где λ_n вещественно и $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ для любого n;

$$\text{(V)} \quad \{e^x x^{-\lambda_n}\},$$

где x и λ_n либо обладают теми же свойствами, что и в (III), либо теми же свойствами, что в (IV);

$$\text{(VI)} \quad \{e^{-nx} x^{-\lambda_n}\},$$

где $x \to \infty$ в S_Δ, и либо $\Delta \geqslant 0$, причем $\operatorname{Re} \lambda_{n+1} > \operatorname{Re} \lambda_n$ для всех n, либо $\Delta > 0$ и λ_n произвольны;

$$\text{(VII)} \quad \{\Gamma(x)/\Gamma(x+n)\}, \quad x \to \infty \quad \text{в} \quad S_\Delta, \ \Delta > -\pi/2.$$

Читателю полезно проверить, что последовательности (I) — (VII) являются асимптотическими, и выяснить смысл ограничений, наложенных в этих примерах на Δ и λ_n. Например, почему последовательность (III) при произвольном $\operatorname{Im} \lambda_n$ не является асимптотической, когда $x \to \infty$ в комплексной плоскости (но является асимптотической в S_Δ)? Бесконечная последовательность $\{\Gamma(x-n)/\Gamma(x+n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, не является асимптотической при $x \to \infty$ в любой области, содержащей неограниченную часть вещественной оси; однако она является асимптотической при $x \to \infty$ в любой области, замыкание которой целиком лежит в верхней или в нижней полуплоскости. Конечная последовательность $\{\Gamma(x-n)/\Gamma(x+n)\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, является асимптотической при $x \to \infty$ в любой области R.

Если заданы некоторые асимптотические последовательности, то можно получить новые асимптотические последовательности с помощью процессов, опирающихся в основном на приведенные в п. 1.1 правила действий над O- и o-символами. При описании некоторых из этих процессов мы ограничимся вещественными переменными, однако их можно распространить и на переменные более общего характера. В большинстве случаев x_0 и R не упоминаются; в этих случаях они предполагаются фиксированными.

Любая подпоследовательность асимптотической последовательности является асимптотической последовательностью. Доказательство вытекает из 1.1 (8).

Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность и $\alpha > 0$, то $\{|\varphi_n|^\alpha\}$ также является асимптотической последовательностью. Доказательство вытекает из 1.1(1).

Две последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, такие, что $\varphi_n = O(\psi_n)$ и $\psi_n = O(\varphi_n)$ при всех n, называются *эквивалентными. Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — эквивалентные последовательности, причем $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность, то $\{\psi_n\}$ так-*

же является асимптотической последовательностью. Для доказательства заметим, что, в силу 1.1(8), имеем

$$\psi_{n+1} = O(\varphi_{n+1}) = O(o(\varphi_n)) = O(o(O(\psi_n))) = o(\psi_n).$$

Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — асимптотические последовательности, имеющие одно и то же число членов, то $\{\varphi_n\psi_n\}$ является асимптотической последовательностью. Доказательство вытекает из 1.1(10).

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n = 1, \ldots, N$, — асимптотическая последовательность и $\alpha_{n,i}$, $n = 1, \ldots, N$; $i = 0, 1, \ldots, k$, $k < N$, — множество положительных чисел, таких, что $\alpha_{n+1,i} \leqslant \alpha_{n,i}$ при всех n, i; если

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} |\varphi_{n+i}|, \quad n = 1, \ldots, N-k, \tag{1}$$

то $\{\psi_n\}$ является асимптотической последовательностью. В этом утверждении N может быть конечным или бесконечным, в то время как k конечно. Для доказательства утверждения заметим, что, в силу конечности k для любых n и $\varepsilon > 0$, найдется окрестность U_ε точки x_0, такая, что при $r = n, n+1, \ldots, n+k$ в $U_\varepsilon \cap R$ выполняется неравенство $|\varphi_{r+1}| \leqslant \varepsilon |\varphi_r|$. Поэтому

$$\psi_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n+1,i} |\varphi_{n+i+1}| \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} |\varphi_{n+i}| = \varepsilon\psi_n. \tag{2}$$

Следующая теорема дает распространение этого утверждения на бесконечные ряды.

Пусть $\{\varphi_n\}$ равномерно по n является асимптотической последовательностью и пусть $\alpha_{n,i}$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots,$ — множество положительных чисел, таких, что $\alpha_{n+1,i} \leqslant \alpha_{n,i}$ для всех n и i. Положим

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n,i} |\varphi_{n+i}|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Если бесконечный ряд, определяющий ψ_1, сходится в некоторой окрестности точки x_0, то существует такое подмножество R_0 в R, для которого x_0 является предельной точкой, что ряд (3) сходится в R_0 и $\{\psi_n\}$ равномерно по n является асимптотической последовательностью при $x \to x_0$ в R_0.

Доказательство. Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ является асимптотической равномерно по n, то существует подмножество R_1 в R, такое, что x_0 является предельной точкой для R_1 и $|\varphi_{n+1}|\leqslant|\varphi_n|$ для всех x из R_1 и всех n. Если x принадлежит R_1, то

$$\sum\alpha_{n+1,i}|\varphi_{n+1+i}|\leqslant\sum\alpha_{n,i}|\varphi_{n+i}|<\ldots<\sum\alpha_{1,i}|\varphi_{i+1}|$$

и потому бесконечные ряды (3) мажорируются рядом для ψ_1. По условию ряд для ψ_1 сходится в некоторой окрестности R_2 точки x_0. Положим $R_0=R_1\cap R_2$. Все функции ψ_n определены в R_0, x_0 является предельной точкой для R_0 и, поскольку $\{\varphi_n\}$ является асимптотической последовательностью равномерно по n, равенство (2) при $k=\infty$ выполняется равномерно по n.

Новые асимптотические последовательности могут быть получены с помощью интегрирования двумя различными путями.

Если $\{\varphi_n(x, y)\}$ равномерно по y, $\alpha<y<\beta$, является асимптотической последовательностью при $x\to x_0$ в R и если сходятся интегралы

$$\Phi_n(x)=\int\limits_\alpha^\beta|\varphi_n(x, y)|\,dy, \tag{4}$$

то $\{\Phi_n\}$ является асимптотической последовательностью. Доказательство вытекает из 1.1(6). Как и в случае (3), достаточно допустить, что $\varphi_n(x, y)$ являются измеримыми функциями по y и что φ_1 — суммируемая функция. Тогда из того, что интеграл $\int|\varphi_n|\,dy$ мажорируется интегралом $\int|\varphi_1|\,dy$, вытекает, что все функции φ_n также суммируемы, быть может, на некотором меньшем множестве R_0.

Если x — вещественное переменное, R — интервал $a<x<b$, $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x\to b$ и если интегралы

$$\Phi_n(x)=\int\limits_x^b|\varphi_n(t)|\,dt \tag{5}$$

сходятся, то $\{\Phi_n\}$ является асимптотической последовательностью при $x\to b$. Доказательство вытекает из 1.1 (5), причем, как и выше, достаточно предположить, что все функ-

ции φ_n измеримы, а функция φ_1 суммируема; в этом случае результат имеет место на некотором интервале $a_1 < x < b$.

Заметим, что дифференцирование асимптотических последовательностей не всегда приводит к асимптотической последовательности. Например, положим

$$\varphi_n = x^{-n}[a + \cos(x^n)], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\{\varphi_n\}$ является асимптотической последовательностью, когда $x \to \infty$ на вещественной оси, но $\{\varphi'_n\}$ не является асимптотической последовательностью.

1.3. Асимптотические разложения

В этом и следующих пунктах x, x_0, R имеют тот же самый смысл, что и в п. 1.1. Через $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, $\{\chi_n\}$, ... всегда обозначаются асимптотические последовательности при $x \to x_0$ в R; $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ... — функции от x, определенные в R и принимающие числовые значения; a, b, c, ... — постоянные (то есть не зависят от x).

Формальный ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ *называется асимптотическим разложением функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ *до* N*-го члена* (*включительно*), *если*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{1}$$

Мы будем обычно обозначать асимптотическое разложение до N-го члена следующим образом:

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_n(x) \text{ до } N\text{-го члена, когда } x \to x_0 \text{ в } R, \tag{2}$$

опуская, как правило, слова «в R». Асимптотическое разложение, состоящее из одного члена, записывается в виде

$$f(x) \sim a_1 \varphi_1(x), \quad x \to x_0 \tag{3}$$

и называется *асимптотическим представлением.* Асимптотическое разложение, справедливое до любого члена (то есть при $N = \infty$), записывается в виде

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_n(x), \quad x \to x_0 \tag{4}$$

и называется просто *асимптотическим разложением.* Асимптотическое разложение может как сходиться, так и расходиться. В большинстве книг рассматриваются только случаи

$N=1$ и $N=\infty$, но мы будем считать N любым целым положительным числом.

Если асимптотическое разложение до N-го члена, где N конечно, зависит от некоторых параметров, мы будем говорить, что оно выполняется *равномерно* по этим параметрам, если остаточный член в формуле (1) является $o(\varphi_N)$ равномерно по параметрам. Асимптотическое разложение ($N=\infty$), зависящее от некоторых параметров, называется выполняющимся равномерно по этим параметрам, если $f-\sum\limits_{n=1}^{M} a_n\varphi_n=o(\varphi_M)$ равномерно по параметрам для всех достаточно больших значений M (но не обязательно равномерно по M).

Формальные (конечные или бесконечные) ряды $\sum a_n\varphi_n$ называются *асимптотическими рядами*. Если $\varphi_n=x^{-r_n}$, то говорят об асимптотическом *ряде степеней*, а если $\varphi_n=x^{\pm n}$, то об асимптотическом *степенном ряде*. Например, $\sum (n-1)!\,(-x)^{n-1}$ является асимптотическим разложением в степенной ряд при $x\to 0$ в области $S_{-\pi/2+\varepsilon}$ функции $f(x)$, определенной равенством (3) во введении. Некоторые авторы говорят об асимптотических степенных рядах, если $\varphi_n=\varphi_0(x)\,x^{\pm n}$, но в этом случае удобнее называть асимптотическим степенным рядом такой ряд, деленный на $\varphi_0(x)$.

Из равенства (1) вытекает, что коэффициенты асимптотического разложения до N-го члена могут быть вычислены с помощью следующей рекуррентной формулы

$$a_m=\lim_{x\to x_0}\Big\{\Big[f(x)-\sum_{n=1}^{m-1} a_n\varphi_n(x)\Big]\Big/\varphi_m(x)\Big\},\quad m=1,\ \ldots,\ N. \qquad (5)$$

Обратно*), предположим, что мы имеем $N+1$ функций,

$$f(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_N(x),$$

определенных в R. Если выполнено равенство (5) и $a_m\neq 0$ при $m=1,\ \ldots,\ N$, *то $\{\varphi_n\}$ является асимптотической последовательностью при $x\to x_0$ и $\sum a_n\varphi_n$ — асимптотическое разложение до N-го члена функции $f(x)$ при $x\to x_0$.*

Чтобы доказать, что $\{\varphi_n\}$ является асимптотической последовательностью, надо показать, что $\varphi_{m+1}=o(\varphi_m)$ при

---

*) Эта теорема принадлежит Макки (A. G. Mackie).

$m=1, \ldots, N-1$. Но из (5) вытекает

$$f-\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n = o(\varphi_m),$$

а если заменить в (5) m на $m+1$, то получим

$$f-\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n = a_{m+1}\varphi_{m+1}+o(\varphi_{m+1}).$$

Сравнивая последние два равенства, получаем соотношение

$$[a_{m+1}+o(1)]\,\varphi_{m+1}=o(\varphi_m).$$

Если $a_{m+1}\neq 0$, то $a_{m+1}+o(1)$ отлично от нуля для всех x в некоторой окрестности x_0. Мы можем поэтому разделить на это выражение и получить $\varphi_{m+1}=o(\varphi_m)$. Таким образом, $\{\varphi_n\}$ является асимптотической последовательностью. Кроме того, полагая в равенстве (5) $m=N$, убеждаемся в выполнении соотношения (1), а потому $\sum a_n\varphi_n$ является асимптотическим разложением до N-го члена функции f.

Если $\sum a_n\varphi_n(x)$ является асимптотическим разложением до N-го члена функции $f(x)$, то тот же самый формальный ряд является асимптотическим разложением этой функции и до M-го члена, $M<N$. Мы имеем, таким образом, несколько более точный результат

$$f(x)=\sum_{n=1}^{M} a_n\varphi_n(x)+O(\varphi_{M+1}),\ x\to x_0,\ M=1,\ldots,N-1, \quad (6)$$

являющийся непосредственным следствием соотношения (1).

Если x_0 и R фиксированы, то из равенства (5) вытекает, что при заданной асимптотической последовательности асимптотическое разложение данной функции, имеющее заданное число членов, *однозначно* определено. С другой стороны, одна и та же функция может иметь асимптотические разложения по двум различным асимптотическим последовательностям, причем эти последовательности могут не быть эквивалентными в смысле п. 1.2. Например,

$$\frac{1}{1+x}\sim\sum(-1)^{n-1}x^{-n},\quad x\to\infty,$$

$$\frac{1}{1+x}\sim\sum(x-1)\,x^{-2n},\quad x\to\infty,$$

$$\frac{1}{1+x}\sim\sum(-1)^{n-1}(x^2-x+1)\,x^{-3n},\quad x\to\infty,$$

В этом примере все три асимптотических разложения являются сходящимися рядами, когда $|x|>1$. Часто бывает, что некоторые асимптотические разложения функции расходятся, в то время как другие сходятся. Преобразование расходящихся асимптотических разложений в сходящиеся интересно с аналитической точки зрения, но мало дает для вычислительной практики. Преобразование асимптотических разложений в сходящиеся разложения, а также в разложения, более удобные для численных расчетов, изучались Эйри (1937), ван дер Корпутом (1951), Миллером (1952), ван Вингаарденом (1953), Ватсоном (1912 b) и др.

Асимптотическое разложение не определяет однозначно суммы $f(x)$. Например, функции $(1+x)^{-1}$, $(1+e^{-x})/(1+x)$, $(1+e^{-\sqrt{x}}+x)^{-1}$ имеют одно и то же асимптотическое разложение $\sum(-1)^{n-1}x^{-n}$, когда $x\to\infty$ в S_Δ, $\Delta>0$. Если задана (конечная или бесконечная) асимптотическая последовательность $\{\varphi_n\}$ при $x\to x_0$ в R, то множество всех функций, определенных в R, распадается на классы *попарно эквивалентных* функций. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *асимптотически равными* относительно $\{\varphi_n\}$, если для всех n выполняется соотношение

$$f(x)-g(x)=o(\varphi_n) \quad \text{при} \quad x\to x_0 \text{ в } R.$$

Поэтому асимптотический ряд представляет не одну функцию, а класс асимптотически равных функций.

1.4. Линейные операции над асимптотическими разложениями

Если $f\sim\sum a_n\varphi_n$ до N-го члена и $g\sim\sum b_n\varphi_n$ до N-го члена и если α, β — некоторые числа, то

$$\alpha f(x)+\beta g(x)\sim\sum(\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n(x) \text{ до } N\text{-го члена.} \quad (1)$$

Эта теорема очевидна, равно как и ее обобщение на линейные комбинации любого конечного числа асимптотических разложений. Обобщение этой теоремы на бесконечные ряды, состоящие из асимптотических разложений, формулируется следующим образом:

Пусть равномерно по i, $i=1, 2, \ldots$, имеем $f_i(x)\sim$ $\sim\sum a_{n,i}\varphi_n(x)$ до N-го члена; пусть, далее, числа α_i таковы,

что ряд $\sum \alpha_i$ *абсолютно сходится, а ряды*

$$A_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}\alpha_i \tag{2}$$

сходятся при всех n. Тогда ряд $\sum \alpha_i f_i(x)$ *сходится в некоторой окрестности точки* x_0, *причем*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) \sim \sum A_n \varphi_n(x) \text{ до } N\text{-го члена.} \tag{3}$$

Доказательство. Мы имеем, равномерно по i,

$$f_i - \sum_{n=1}^{N} a_{n,i}\varphi_n = o(\varphi_N).$$

Кроме того, $\sum |\alpha_i| < \infty$. В силу 1.1(3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(f_i - \sum_{n=1}^{N} a_{n,i}\varphi_n\right) = o(\varphi_N),$$

причем стоящий слева ряд сходится в некоторой окрестности точки x_0. Если $N < \infty$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства $\sum_{n=1}^{N} A_n\varphi_n$, мы получаем выражение (3). Если $N = \infty$, то как предположения, так и заключение теоремы справедливо для всех достаточно больших N, а потому $\sum A_n\varphi_n$ является асимптотическим разложением функции $F(x)$.

Формулу (1) можно обобщить на конечные или бесконечные асимптотические разложения.

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n = 1, \ldots, N < \infty$, *и* $\{\psi_m\}$, $m = 1, \ldots, M \leqslant \infty$, *являются асимптотическими последовательностями для одних и тех же* R *и* x_0, *причем* $\varphi_N = O(\psi_m)$ при любом m; *если* $f \sim \sum a_n\varphi_n$ *до N-го члена и, при любом n,* $\varphi_n \sim \sum b_{mn}\psi_m$ *до M-го члена, то*

$$f(x) \sim \sum c_m\psi_m(x) \text{ до } N\text{-го члена,} \tag{4}$$

где

$$c_m = \sum_{n=1}^{N} a_n b_{mn}. \tag{5}$$

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\{\psi_m\}$, $m = 1, \ldots, M \leqslant \infty$, *являются асимптотическими последовательностями, при-*

чем для любого n найдется такое целое число $\mu(n) \leqslant M$, что $\mu(n) \to M$, когда $n \to \infty$ и $\varphi_n = O(\psi_{\mu(n)})$; если $f \sim \sum a_n \varphi_n$, $\varphi_n \sim \sum b_{mn} \psi_m$ до M-го члена равномерно по n, ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится и бесконечные ряды (5) *сходятся при любом m, то имеет место равенство* (4).

Доказательство очевидно, если M и N — конечные числа, так как тогда, в силу 1.1(3),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n + o(\varphi_N) = \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{m=1}^{M} b_{mn} \psi_m + o(\psi_M) \right) + o(\psi_M) = \\ &= \sum_{m=1}^{M} c_m \psi_m + o(\psi_M). \end{aligned}$$

Если $M = \infty$, то это же самое рассуждение справедливо при любом M и, следовательно, $\sum c_m \psi_m$ является асимптотическим разложением функции $f(x)$. Для обобщения на случай $N = \infty$ надо использовать обобщение формулы 1.1(3) на бесконечные ряды.

Перейдем теперь к вопросу об *интегрировании* асимптотических разложений как по вещественному параметру y, так и по переменному x; в последнем случае мы предполагаем, что переменное x вещественно.

Пусть $f(x, y) \sim \sum a_n(y) \varphi_n(x)$ до N-го члена равномерно по y, $\alpha < y < \beta$, пусть, далее, $f(x, y)$ при любом фиксированном x и $a_n(y)$, при любом n, являются измеримыми функциями от y, а $h(y)$ является суммируемой функцией, такой, что все интегралы

$$A_n = \int_{\alpha}^{\beta} h(y)\, a_n(y)\, dy \tag{6}$$

сходятся. Тогда для всех x в некоторой окрестности точки x_0 сходятся интегралы

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} h(y)\, f(x, y)\, dy, \tag{7}$$

причем

$$F(x) \sim \sum A_n \varphi_n(x) \text{ до } N\text{-го члена.} \tag{8}$$

Эта теорема доказывается почти так же, как и соответствующая теорема для бесконечных рядов, за исключением того, что вместо 1.1(3) надо использовать 1.1(6). Очевидно, что в этой теореме интервал (α, β) можно заменить любым измеримым множеством конечной или бесконечной меры или множеством в многомерном пространстве.

Пусть x — вещественное переменное, R — интервал $a < x < b$, а $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность положительных функций при $x \to b$, такая, что все интегралы

$$\Phi_n(x) = \int_x^b \varphi_n(t)\,dt \tag{9}$$

сходятся. Если $f(x) \sim \sum a_n\varphi_n(x)$ до N-го члена при $x \to b$ и $f(x)$ — измеримая функция, то интеграл

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt \tag{10}$$

сходится для всех x, лежащих в некотором интервале $c < x < b$, причем

$$F(x) \sim \sum a_n\Phi_n(x) \text{ до } N\text{-го члена, когда } x \to b. \tag{11}$$

Доказательство вытекает из 1.1(5).

Дифференцирование асимптотических разложений как по переменному x, так и по параметру, вообще говоря, недопустимо. Некоторые общие результаты относительно дифференцирования асимптотических разложений аналитических функций комплексного переменного будут указаны в п. 1.6.

1.5. Другие операции над асимптотическими разложениями

Умножение асимптотических рядов не приводит, вообще говоря, к асимптотическому ряду, так как в формальное произведение рядов $\sum a_n\varphi_n$ и $\sum b_n\varphi_n$ входят все произведения $\varphi_m\varphi_n$, а вообще говоря, невозможно упорядочить систему функций $\{\varphi_m\varphi_n\}$, m, $n = 1, \ldots, N$, так, чтобы получилась асимптотическая последовательность. В некоторых важных

случаях, однако, либо произведения $\varphi_m\varphi_n$ образуют асимптотическую последовательность, либо эти произведения обладают асимптотическими разложениями по некоторой асимптотической последовательности (не обязательно совпадающей с $\{\varphi_n\}$). Докажем сначала общий результат об умножении двух асимптотических разложений.

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n=1, \ldots, N$, $\{\psi_m\}$, $m=1, \ldots, M$, и $\{\chi_k\}$, $k=1, \ldots, K$, являются такими асимптотическими последовательностями, что $\varphi_1\psi_M = O(\chi_K)$, $\varphi_N\psi_1 = O(\chi_K)$ и

$$\varphi_n\psi_m \sim \sum c_{nmk}\chi_k \text{ до } K\text{-го члена.} \tag{1}$$

Если $f \sim \sum a_n\varphi_n$ до N-го члена и $g \sim \sum b_m\psi_m$ до M-го члена, то $fg \sim \sum C_k\chi_k$ до K-го члена, где

$$C_k = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n b_m c_{nmk}. \tag{2}$$

Здесь K может быть конечным или бесконечным, а N и M конечны. Результат остается справедливым, если M или N, или M и N одновременно бесконечны при условии, что все бесконечные ряды (или двойные ряды) в формуле (2) *сходятся.*

Коэффициенты C_k получаются при умножении рядов $\sum a_n\varphi_n$ и $\sum b_m\psi_m$ и подстановке разложения (1), поэтому вместо равенства (2) можно сказать словами: «где коэффициенты C_k получаются с помощью формальной подстановки». Это выражение будет употребляться далее в аналогичных случаях.

Докажем сначала теорему для конечных N, M, K. В силу соотношений (1) и (2), имеем

$$\begin{aligned} fg &= \Big[\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n + o(\varphi_N)\Big]\Big[\sum_{m=1}^{M} b_m\psi_m + o(\psi_M)\Big] = \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n b_m \varphi_n\psi_m + o(\varphi_1\psi_M) + o(\varphi_N\psi_1) = \\ &= \sum_{k=1}^{K} C_k\chi_k + o(\chi_K) + o(\varphi_1\psi_M) + o(\varphi_N\psi_1), \end{aligned}$$

чем требуемый результат и доказан. Если разложение (1) справедливо до любого члена, причем $\varphi_1\psi_M$ и $\varphi_N\psi_1$ являются $O(\chi_k)$ для любого k, то проведенное выше вычисление сохраняет силу для любого K, а потому полученный резуль-

тат справедлив и при $K=\infty$. Обобщение на случай бесконечных M и N доказывается подобным образом при условии, что ряды, определяющие коэффициенты C_k, сходятся.

Последовательность функций $\{\varphi_n\}$, $n=1, \ldots, N$, *называется мультипликативной асимптотической последовательностью, если* $\{\varphi_n\}$ *является асимптотической последовательностью,* $\varphi_1=O(1)$ *и* $\varphi_n\varphi_m \sim \sum c_{nmk}\varphi_k$ *до* N*-го члена,* m, $n=1, 2, \ldots, N$. В случае мультипликативных асимптотических последовательностей полученный выше результат об умножении асимптотических разложений может быть существенно усилен.

Если $\{\varphi_n\}$, $n=1, \ldots, N$, *является мультипликативной асимптотической последовательностью,*

$$f_i \sim \sum a_{n,i}\varphi_n \text{ до } N\text{-го члена, } i=1, \ldots, k,$$

и $P(z_1, \ldots, z_k)$ *является многочленом от* k *комплексных переменных* $z_1, \ldots, z_k$, *то функция* $F(x)=P(f_1, \ldots, f_k)$ *имеет асимптотическое разложение* $F\sim\sum A_n\varphi_n$ *до* N*-го члена, коэффициенты которого* A_n *могут быть вычислены с помощью формальной подстановки.*

Для того чтобы доказать эту теорему, заметим, что в случае мультипликативной асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ мы имеем $\varphi_1\varphi_N=O(\varphi_N)$, а функции $\varphi_n\varphi_m$ имеют асимптотические разложения до N-го члена. По общей теореме отсюда вытекает, что если $f\sim\sum a_n\varphi_n$ до N-го члена и $g\sim\sum b_n\varphi_n$ до N-го члена, то функция fg обладает асимптотическим разложением $\sum c_n\varphi_n$ до N-го члена, коэффициенты которого могут быть вычислены с помощью формальной подстановки. Вычисление любого многочлена $P(f_1, \ldots, f_k)$ сводится к конечному числу операций, каждая из которых заключается либо в образовании линейной комбинации, либо в умножении двух асимптотических последовательностей. Каждая из этих операций сохраняет асимптотический характер разложения, причем получающиеся при этом разложения могут быть вычислены с помощью формальной подстановки. Тем самым наша теорема доказана.

Полученный для многочленов результат может быть при некоторых предположениях распространен на (сходящиеся) степенные ряды и даже на асимптотические степенные ряды. Ради простоты ограничимся случаем одного переменного z,

хотя соответствующее обобщение этого результата справедливо и в случае многих переменных.

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n=1, \ldots, N$, является мультипликативной асимптотической последовательностью, такой, что $\varphi_1 = o(1)$ и $|\varphi_1|^M = O(\varphi_N)$ для некоторого натурального M. *Если $f(z) \sim \sum c_m z^m$ до M-го члена, когда $z \to 0$ в комплексной плоскости и $z = z(x) \sim \sum a_n \varphi_n$ до N-го члена, когда $x \to x_0$ в R, то функция $F(x) = f(z(x))$ обладает асимптотическим разложением $\sum A_n \varphi_n$ до N-го члена, когда $x \to x_0$, причем коэффициенты A_n этого разложения могут быть вычислены с помощью формальной подстановки.*

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что функции z^m имеют асимптотические разложения $z^m \sim \sum b_{mn} \varphi_n$ до N-го члена, причем $z^M = O(\varphi_N)$. Следовательно, можно применить теорему из п. 1.4 о подстановке одного асимптотического разложения в другое асимптотическое разложение. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь функции $f(x)$, имеющие асимптотическое разложение вида

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n + o(\varphi_N). \tag{3}$$

В этом случае из теоремы вытекает, что если $c \neq 0$ и функции $\{\varphi_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы, то $[f(x)]^{-1}$ обладает асимптотическим разложением того же вида. Иными словами, асимптотические разложения вида (3) можно делить друг на друга. Это позволяет распространить полученные выше результаты на рациональные функции.

Если $\{\varphi_n\}$, $n = 1, \ldots, N$, является мультипликативной асимптотической последовательностью, $\varphi_1 = o(1)$, $|\varphi_1|^M = O(\varphi_M)$ для некоторого M, $f_i \sim \sum a_{n,i} \varphi_n$ до N-го члена, $i = 1, \ldots, k$, и $P(z_1, \ldots, z_k)$ является рациональной функцией от k комплексных переменных $z_1, \ldots, z_k$, знаменатель которой отличен от нуля при $z_1 = z_2 = \ldots \ldots = z_k = 0$, то функция $F(x) = P(f_1, \ldots, f_k)$ обладает асимптотическим разложением $A_0 + \sum A_n \varphi_n$ до N-го члена, коэффициенты A_n которого могут быть вычислены с помощью формальной подстановки.

При тех же самых предположениях существует асимптотическое разложение функции $g(F(x))$, где $g(\zeta)$ является

функцией комплексного переменного ζ, регулярной в некоторой окрестности точки $\zeta_0 = P(0, \ldots, 0)$. Таким путем можно доказать существование асимптотических разложений для таких выражений, как, например, $\exp[P(f_1, \ldots, f_k)]$.

1.6. Асимптотические степенные ряды

Последовательность функций $\{x^{-n}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, или $n = 1, 2, \ldots$, является мультипликативной асимптотической последовательностью при $x \to \infty$ в любой области комплексной плоскости, не содержащей точки $x = 0$. Эта последовательность удовлетворяет всем условиям, наложенным на асимптотические последовательности в двух предыдущих пунктах, за исключением того, что в некоторых теоремах п. 1.5 следует исключить значение $n = 0$. Кроме того, она обладает некоторыми специальными свойствами.

Асимптотическое разложение

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \text{ до } N\text{-го члена, когда } x \to \infty, \quad (1)$$

мы называем *асимптотическим степенным рядом.* Из результатов пп. 1.5 и 1.6 вытекает, что асимптотическое разложение в степенной ряд можно умножать на постоянную величину, а два таких разложения можно складывать и умножать друг на друга, а также делить при условии, что в разложении знаменателя $a_0 \neq 0$. Асимптотические степенные ряды можно подставлять в конечные линейные комбинации, многочлены и рациональные функции при условии, что знаменатель этих функций не стремится к нулю при $x \to \infty$; их можно подставлять также в сходящиеся и асимптотические степенные ряды $\sum c_n z^n$, $z \to 0$, при условии, что в разложении (1) функции $z = f(x)$ коэффициент $a_0 = 0$. Подстановка разложения (1) в асимптотические и сходящиеся ряды другого типа возможна, если выполнены условия, указанные в п. 1.5. Во всех этих случаях коэффициенты новых разложений получаются с помощью формальных подстановок и перестановки членов. Если асимптотическое разложение в степенной ряд (1) имеет место равномерно по некоторому параметру, то его можно интегрировать по этому параметру. Наконец, *если имеет место разложение* (1), *то функция* $f(x) - a_0 - a_1/x$

интегрируема, причем

$$F(x)=\int\limits_x^\infty\left[f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right]dt\sim\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{2x^2}+\frac{a_4}{3x^3}+\ldots \quad (2)$$

до $(N-2)$-го члена, когда $x\to\infty$.

Простым следствием последнего результата является следующая теорема о дифференцировании таких разложений. *Если функция $f(x)$ в равенстве (1) дифференцируема, а функция $f'(x)$ может быть разложена в асимптотический степенной ряд, то*

$$f'(x)\sim-\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-\frac{3a_3}{x^4}-\ldots$$

до $N-1$-го члена, когда $x\to\infty$. (3)

В случае *аналитических функций* имеет место более точное утверждение, именно, можно не предполагать, что функция $f'(x)$ имеет разложение в асимптотический степенной ряд. Пусть R — область

$$|x|>a,\quad \alpha<\arg x<\beta.$$

Пусть, далее, $a_1>a$, $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$ и R_1 — область

$$|x|>a_1,\quad \alpha_1<\arg x<\beta_1.$$

Если функция $f(x)$ регулярна в области R и разложение (1) имеет место равномерно по $\arg x$, когда $x\to\infty$ в R, то разложение (3) имеет место равномерно по $\arg x$, когда $x\to\infty$ в R_1. Доказательство этой теоремы вытекает из интегральной формулы Коши для производной функции $f(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)}{(x-z)^2}dz. \quad (4)$$

При заданных R, R_1 найдется такое $\varepsilon>0$, что для любого x в R_1 окружность с центром в x и радиусом $\varepsilon|x|$ лежит в R; мы можем выбрать эту окружность в качестве контура интегрирования в формуле (4). Вдоль этой окружности $z=x+\varepsilon xe^{it}$ и $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, а потому формула (4) принимает вид

$$f'(x)=\frac{1}{2\pi x\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}e^{-it}f[x(1+\varepsilon e^{it})]\,dt. \quad (5)$$

Но функция $e^{-it} f[(x+\varepsilon x e^{it})]$ имеет асимптотическое разложение в степенной ряд равномерно по t, которое можно проинтегрировать по t; отсюда вытекает, что функция $f'(x)$ имеет асимптотическое разложение в степенной ряд. Как было показано выше, это разложение задается формулой (3).

Аналитические функции могут, вообще говоря, иметь в разных секторах различные асимптотические разложения в степенные ряды (явление Стокса). Это не имеет места, если аналитическая функция регулярна на бесконечности, что вытекает из следующей теоремы.

Если функция $f(x)$ однозначна и регулярна при $|x|>a$, причем формула (1) *справедлива для всех значений* $\arg x$, *то степенной ряд в формуле* (1) *сходится при достаточно больших значениях $|x|$ и сумма его равна $f(x)$.* Чтобы доказать это, положим $x=1/\xi$ и $g(0)=a_0$, $g(\xi)=f(1/\xi)$, $0<|\xi|<|a|^{-1}$. Тогда функция $g(\xi)$ является однозначной непрерывной функцией в области $|\xi|<|a|^{-1}$, причем эта функция регулярна в этой области, за исключением, быть может, точки $\xi=0$. Но в точке $\xi=0$ функция g не имеет ни полюса, ни существенной особенности, так как она ограничена в некоторой окрестности этой точки. Таким образом, функция $g(\xi)$ регулярна при $\xi=0$ и может быть разложена в ряд Маклорена. Из теоремы единственности для асимптотических разложений вытекает, что разложение (1) при $x=1/\xi$ является разложением Маклорена.

1.7. Суммирование асимптотических рядов

В п. 1.3 было отмечено, что асимптотическая последовательность $\{\varphi_n\}$ задает соотношение эквивалентности между функциями, определенными в области R. Две функции, определенные в этой области, асимптотически равны, если их разность для всех n есть $o(\varphi_n)$. Асимптотически равные функции имеют одинаковые асимптотические разложения. Поэтому, если задано асимптотическое разложение $f\sim\sum a_n\varphi_n$, то естественно назвать *суммой асимптотического ряда* $\sum a_n\varphi_n$ *класс всех функций, асимптотически равных f.*

Мы закончим эту главу доказательством того, что *любой асимптотический ряд имеет сумму.* Результаты этого вида были доказаны для асимптотических степенных рядов Борелем и Карлеманом (1926), для рядов, мажорируемых асимпто-

тическим рядом степеней,— ван дер Корпутом (1954b) и для асимптотических рядов аналитических функций — Карлеманом (1926). Излагаемое ниже доказательство является видоизменением доказательства ван дер Корпута.

Асимптотический ряд является формальным конечным или бесконечным рядом $\sum a_n\varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность и a_n — постоянные. Так как подпоследовательность асимптотической последовательности является последовательностью того же вида, мы можем считать, что $a_n \neq 0$ при всех n. Асимптотическая сумма ряда $\sum a_n\varphi_n$ является классом асимптотически равных функций, и мы докажем существование асимптотической суммы, построив один из представителей этого класса. Если $\sum a_n\varphi_n$ является конечным асимптотическим рядом, то в качестве представителя асимптотической суммы можно взять сумму

$$a_1\varphi_1 + \ldots + a_N\varphi_N,$$

понимаемую в обычном смысле. Поэтому достаточно дать доказательство для бесконечных асимптотических рядов $\sum a_n\varphi_n$, в которых $a_n \neq 0$ при всех n.

Пусть U_0 — окрестность точки x_0 и пусть для всех $n=1$, $2, \ldots$ U_n является такой окрестностью точки x_0, что замыкание U_{n+1} лежит в U_n и

$$|a_{n+1}\varphi_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_n\varphi_n|$$

для всех x, принадлежащих пересечению U_n и R; такие окрестности существуют, так как

$$a_{n+1}\varphi_{n+1} = o(a_n\varphi_n).$$

Обозначим для любого n через $\mu_n(x)$ такую непрерывную функцию от x, что $0 \leqslant \mu_n(x) \leqslant 1$ в R, $\mu_n(x)=0$, если x не принадлежит U_n и $\mu_n(x)=1$, если x принадлежит U_{n+1}; такие функции существуют, поскольку замыкания U_{n+1} лежат в U_n. Тогда при всех x из U_n имеет место неравенство

$$|a_{n+p}\mu_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)| \leqslant 2^{-p}|a_n\varphi_n(x)|. \qquad (1)$$

В самом деле, это неравенство имеет место по построению, если x принадлежит U_{n+p}; если же x лежит вне U_{n+p}, то левая часть неравенства обращается в нуль. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n(x)\varphi_n(x). \qquad (2)$$

В силу соотношения (1), этот ряд сходится для всех x и задает функцию $f(x)$ в R (для x, не принадлежащих всем U_n, этот ряд обрывается). Чтобы доказать, что $f \sim \sum a_n \varphi_n$, когда $x \to x_0$, зафиксируем N и выберем x в пересечении U_{N+1} и R. Тогда $\mu_n(x) = 1$ при $n = 1, \ldots, N$ и, в силу соотношения (1),

$$|f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n| \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} |a_n \mu_n \varphi_n| \leqslant |a_{N+1} \varphi_{N+1}| \sum_{N+1}^{\infty} 2^{N+1-n} = \\ = 2 |a_{N+1} \varphi_{N+1}| = o(\varphi_N).$$

Таким образом, $\sum a_n \varphi_n$ является асимптотическим разложением до любого члена функции f, определенной равенством (2). Асимптотическая сумма ряда $\sum a_n \varphi_n$ является классом всех функций, асимптотически равных f.

Окрестности U_n можно построить так, чтобы единственной точкой, принадлежащей всем этим окрестностям, была точка x_0; в этом случае ряды в формуле (2) обрываются при всех $x \neq x_0$. Если функции φ_n непрерывны в R, то и функция f непрерывна в R. Если x — вещественное переменное или точка n-мерного евклидова пространства, то функции $\mu_n(x)$ можно выбрать так, чтобы они были бесконечно дифференцируемы; в этом случае, если функции φ_n имеют непрерывные производные до k-го порядка включительно ($k \leqslant \infty$), то и функция $f(x)$ имеет непрерывные производные тех же порядков. Карлеман доказал, что для некоторых аналитических функций φ_n комплексного переменного x асимптотическая сумма содержит функции, являющиеся аналитическими функциями от x.

В общем случае невозможно приписать асимптотическому ряду единственную асимптотическую сумму; но в некоторых случаях может оказаться, что при более точных предположениях о коэффициентах асимптотических рядов и некоторых ограничениях на функции $f(x)$ получаются единственные суммы; в этих случаях асимптотические ряды, несмотря на то, что они расходятся, в некотором смысле суммируемы к их асимптотическим суммам. Теоремы об асимптотических степенных рядах, суммируемых к аналитическим функциям, регулярным в некоторых секторах, были получены Ватсоном (1912а) и Неванлинна (1916).

ЛИТЕРАТУРА

Airey J. R., Philos. Mag. (7) 24, 521—552, 1937.
Borel Emile, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 12, 9—55, 1895.
Borel Emile, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 16, 8—136, 1899.
Borel Emile, Leçons sur le series divergentes, second ed. Paris, 1928.
Bromwich T. J., I'A, Infinite series second ed., McMillan, especially sec. 113 ff, 1926.
Carleman T. G. T., Les fonctions quasi-analytiques Paris, especially Chap. V., 1926.
van der Corput J. G., Asymptotic expansions, Parts I and II, National Bureau of Standards (Working Paper), 1951.
van der Corput J. G., Asymptotic expansions, Part III, National Bureau of Standards (Working Paper), 1952.
van der Corput J. G., Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam Proc. 57, 206—217, 1954a.
van der Corput J. G., Asymptotic Expansions I. Fundamental theorems of Asymptotics. Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1954b.
Knopp Komrad, Theory and application of infinite series, especially Chap. XIV, 1928.
Miller J. C. P., Proc. Cambridge Philos. Soc. 48, 243—254, 1952.
Nevanlinna F. E. H., Ann. Acad. Sci. Fennicae (A) 12, no. 3, 81 pp., 1916.
Watson G. N., Philos. Trans. Royal Soc. A, 211, 279—313, 1912a.
Watson G. N. Rend. Circ. Mat. Palermo 34, 41—88, 1912b.
van Wijngaarden A., Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam, Proc., 56, 522—543, 1953.

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЫ

Существует много методов для получения асимптотических разложений функций, заданных определенными интегралами. Копсон (1946) дал обзор этих методов; дальнейший материал содержится в лекциях ван дер Корпута и в статьях, указанных в конце этой главы.

2.1. Интегрирование по частям

Асимптотические разложения часто могут быть получены с помощью повторного интегрирования по частям. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в области $-\pi < \arg x < \pi$ интегралом

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt. \tag{1}$$

Повторно интегрируя по частям, получаем

$$f(x)=1-x\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}\,dt=1-x+2x^2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^3}\,dt=\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n n!\,x^n+(-1)^{m+1}(m+1)!\,x^{m+1}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{m+2}}\,dt. \tag{2}$$

Можно доказать, что последний интеграл есть $O(1)$, когда $x\rightarrow 0$ в области S_Δ, $\Delta > -\pi/2$. Мы получили, таким образом, новый вывод эйлерова асимптотического разложения, рассмотренного во введении.

Область применения этого метода довольно ограничена, и не всегда легко сформулировать точные теоремы, обладающие достаточной общностью. В дальнейшем будут приведены некоторые результаты, которые нам кажутся основными.

Для любой функции $f(t)$ обозначим через f_m производную m-го порядка, а через f_{-m} m-й повторный интеграл. Таким образом,

$$f_0 = f, \quad f_m = \frac{d^m f}{dt^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\frac{df_{-m}}{dt} = f_{-m+1}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Заметим, что f_{-m} содержит m постоянных (по одной от каждого интегрирования). Мы будем предполагать, что эти постоянные выбраны соответствующим образом. С помощью повторного интегрирования по частям получаем формулу

$$\int_\alpha^\beta g(t)\, h(t)\, dt = \sum_{n=0}^{N-1} s_n + R_N, \tag{5}$$

где

$$s_n = (-1)^n \left[g_n(\beta)\, h_{-n-1}(\beta) - g_n(\alpha)\, h_{-n-1}(\alpha)\right], \tag{6}$$

$$R_n = (-1)^n \int_\alpha^\beta g_n(t)\, h_{-n}(t)\, dt. \tag{7}$$

Если (α, β) является конечным интервалом, то формула (5) справедлива при условии, что функция g имеет непрерывную производную N-го порядка, а функция h интегрируема. Если интервал (α, β) бесконечен, то все интегралы должны быть сходящимися и должны существовать пределы $g_n(t)\ \ h_{-n-1}(t)$ при $t \to \alpha$, $t \to \beta$.

Если функция g имеет непрерывную производную $N+1$-го порядка, то с помощью еще одного интегрирования по частям получаем

$$R_N = s_N + R_{N+1}. \tag{8}$$

В некоторых случаях с помощью этого соотношения можно сравнить остаток R_N с первым отброшенным членом s_N.

Если функции g и h вещественны, а функции $g_N h_{-N}$ и $g_{N+1} h_{-N-1}$ знакопостоянны на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеют на нем одинаковые знаки, то R_N имеет тот же знак, что и s_N, причем $|R_N| \leqslant |s_N|$. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (8) и заметить, что в нашем случае R_N и R_{N+1} имеют противоположные знаки и, следовательно, R_N и s_N имеют одинаковые знаки, причем

$$|R_N| = \big|\,|s_N| - |R_{N+1}|\,\big|.$$

Пусть функция g вещественна, функция $|h_{-N-1}|$ возрастает и g_N, g_{N+1} знакопостоянны на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеют на нем одинаковые знаки; либо пусть функция g вещественна, $|h_{-N-1}|$ убывает, а функции g_N, g_{N+1} знакопостоянны на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеют на нем разные знаки; тогда $|R_N| \leqslant 2|s_N|$.

Мы докажем это утверждение в случае, когда $|h_{-N-1}|$ является возрастающей функцией от t и $g_N \geqslant 0$, $g_{N+1} \geqslant 0$. При этих предположениях имеем

$$\begin{aligned}|R_{N+1}| &\leqslant |h_{-N-1}(\beta)|(g_N(\beta) - g_N(\alpha)) \leqslant \\ &\leqslant |h_{-N-1}(\beta) g_N(\beta)| - |h_{-N-1}(\alpha) g_N(\alpha)| \leqslant \\ &\leqslant |h_{-N-1}(\beta) g_N(\beta) - h_{-N-1}(\alpha) g_N(\alpha)|,\end{aligned}$$

и, следовательно, $|R_{N+1}| \leqslant |s_N|$. Из формулы (8) вытекает нужный нам результат. Если $g_N \leqslant 0$, $g_{N+1} \leqslant 0$, то заменяем g на $-g$. В случае, когда функция $|h_{-N-1}|$ убывает, надо заменить t на $-t$.

В качестве приложения этих результатов рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую формулой (1). Если $x > 0$, положим

$$g(t) = (1 + xt)^{-1}, \quad h(t) = e^{-t}, \quad h_{-m}(t) = (-1)^m e^{-t}.$$

В этом случае $g_m h_{-m} \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$ и, следовательно, $0 \leqslant (-1)^m R_m \leqslant (-1)^m s_m$. Если x — комплексное число, то наши результаты неприменимы. Однако, если в формуле (1) заменить t на t/x и соответственно этому положить $g = (1+t)^{-1}$, $h = x^{-1} \exp(-t/x)$, то при комплексных значениях x, таких, что $\operatorname{Re} x > 0$, функции g_m и g_{m+1} знакопостоянны и имеют противоположные знаки, а $|h_{-m-1}|$ является убывающей функцией от t при $t \geqslant 0$. Следовательно, в этом случае $|R_m| \leqslant 2|s_m|$. (На самом деле и в этом случае легко доказать с помощью формулы (7), что $|R_m| \leqslant |s_m|$.)

Предположим теперь, что подынтегральная функция в формуле (5), а следовательно, также и функции s_N и R_N, зависят от переменной x. Если $\{s_n\}$ — асимптотическая последовательность и если, кроме того, с помощью одного из ранее полученных результатов (или каким-либо иным методом) можно доказать, что $R_N = O(s_N)$, то формула (5) приводит к асимптотическому разложению интеграла до N-го члена. Например, в случае разложения (2) $\{x^n\}$ является асимптотической последовательностью при $x \to 0$; выше было доказано, что

$|R_n| \leqslant 2|s_N|$ для любого N в области $\operatorname{Re} x > 0$; следовательно, (2) является асимптотическим разложением функции $f(x)$, определенным в области S_Δ, $\Delta > 0$. (Фактически, во введении было доказано, что асимптотическое разложение справедливо в более широкой области S_Δ, $\Delta > -\pi/2$; это также можно установить с помощью оценки последнего интеграла в формуле (2).)

Последовательность $\{s_n\}$ часто оказывается асимптотической в случае, когда $h(t)$ имеет вид

$$h(t) = k(xt).$$

Обозначим через $k_{-m}(u)$ m-й повторный интеграл по переменной u от $k(u)$. Из формулы (5) вытекает

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,k(xt)\,dt = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^{-n-1} [g_n(\beta)\,k_{-n-1}(\beta x) - \\ - g_n(\alpha)\,k_{-n-1}(\alpha x)] + R_N. \quad (9)$$

Далее, если функции $k_{-n}(u)$ ограничены, а функции $g_n(\beta)\,k_{-n-1}(\beta x) - g_n(\alpha)\,k_{-n-1}(\alpha x)$ не принимают значений, лежащих в некоторой окрестности нуля, и если, кроме того, R_N допускает приведенную выше оценку, то (9) является асимптотическим разложением при $x \to \infty$, причем область изменения x определяется оценкой R_N. Кажущийся более общим случай $h(t) = k[x\varphi(t)]$ может быть сведен к рассмотренному выше с помощью разбиения интервала (α, β) на части, на каждой из которых функция $\varphi(t)$ монотонна, и введения на каждой из этих частей $\varphi(t)$ в качестве новой переменной. Чтобы применить один из описанных выше критериев для оценки R_N, надо знать поведение производных вида

$$\frac{d^m}{d\varphi^m}\left[\frac{g(t)}{\varphi'(t)}\right].$$

Если g и φ имеют производные одного и того же или чередующихся знаков, эта информация может быть получена без непосредственных вычислений из результатов об абсолютно монотонных и вполне монотонных функциях (см., например, Уиддер, 1941, глава IV). Общие теоремы такого типа были получены ван дер Корпутом и Франклином (1951). Наиболее важным приложением этих методов является асимптотическое

разложение интегралов вида

$$\int_a^b g(t)\, e^{xh(t)}\, dt, \quad \int_a^b g(t) \frac{\cos}{\sin} [xh(t)]\, dt.$$

Более общие результаты, касающиеся функций вида $g(t) = (t-a)^{-\lambda} g_1(t)$, где $g_1(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные, были получены ван дер Корпутом (1934).

2.2. Интегралы Лапласа

Интегралы вида

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t)\, dt = \mathfrak{L}\{\varphi\} \tag{1}$$

называются *интегралами Лапласа*. Такие интегралы встречаются при решении дифференциальных уравнений с помощью определенных интегралов и во многих других вопросах. Несобственный интеграл в формуле (1) понимается как

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-xt} \varphi(t)\, dt.$$

Поэтому функцию $\varphi(t)$ мы всегда будем считать интегрируемой на любом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, $T < \infty$. Функция φ называется принадлежащей к классу $L(x_0)$, если интеграл в формуле (1) существует при $x = x_0$ в указанном выше смысле. Известно (Уиддер, 1941, глава II), что для любой функции φ из $L(x_0)$ существует $\mathfrak{L}\{\varphi\}$, причем $\mathfrak{L}\{\varphi\}$ является аналитической функцией от x в полуплоскости $\operatorname{Re}(x - x_0) > 0$. В частности, если функция $\varphi(t)$ интегрируема на любом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, $T < \infty$, и если $\varphi(t) = O(e^{at})$ для некоторого постоянного a, когда $t \to \infty$, то $\mathfrak{L}\{\varphi\}$ существует (причем несобственный интеграл абсолютно сходится) и является аналитической функцией от x в полуплоскости $\operatorname{Re}(x - a) > 0$.

В некоторых случаях асимптотическое поведение $f(x)$ при $x \to \infty$ может быть исследовано с помощью интегрирования по частям. *Если $\varphi(t)$ имеет при $0 \leqslant t \leqslant a$ непрерывную производную N-го порядка и принадлежит, при некотором*

x_0, к $L(x_0)$, то

$$f(x) \sim \sum \varphi^{(n)}(0)\, x^{-n-1} \tag{2}$$

до N-го члена равномерно по $\arg x$, *когда* $x \to \infty$ *в* S_Δ, $\Delta > 0$.
В самом деле, пусть $\operatorname{Re}(x - x_0) > 0$. Запишем интеграл (1) в виде

$$f(x) = \int_0^a e^{-xt} \varphi(t)\, dt + \int_a^\infty e^{-xt} \varphi(t)\, dt. \tag{3}$$

Второй интеграл существует и приводится с помощью интегрирования по частям к виду

$$I_2 = \frac{1}{x - x_0} \int_a^\infty e^{-(x - x_0)t} \psi(t)\, dt,$$

где функция

$$\psi(t) = \int_a^t e^{-x_0 u} \varphi(u)\, du$$

ограничена при $t \geqslant a$. Если $|\psi| \leqslant A$, то

$$|I_2| \leqslant \frac{Ae^{-(\rho - \rho_0)a}}{|x - x_0|\,|\rho - \rho_0|} = O(e^{-\rho a}),$$

когда $x = \rho + i\sigma \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > 0$. К первому интегралу применим формулу 2.1(5), положив $g = \varphi(t)$, $h_{-n} = (-x)^{-n} e^{-xt}$. Получим

$$s_n = [\varphi^{(n)}(0) - \varphi^{(n)}(a)^{-xa}]\, x^{-n-1} = \varphi^{(n)}(0)\, x^{-n-1} + O(e^{-\rho a})$$

и

$$R_N = x^{-N} \int_0^a \varphi^{(N)}(t)\, e^{-xt}\, dt.$$

Функция $\varphi^{(N)}(t)$ непрерывна и, следовательно, ограничена при $0 \leqslant t \leqslant a$. Если $|\varphi^{(N)}(t)| \leqslant B$, то

$$|R_N| \leqslant B\,|x|^{-N} \rho^{-1} \leqslant B\,|x|^{-N-1} \operatorname{cosec} \Delta = O(x^{-N-1})$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > 0$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что $O(e^{-\rho a}) = o(x^{-N})$ равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > 0$.

Существенное обобщение последней теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма. *Пусть* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *при некотором* x_0 *принадлежат* $L(x_0)$, $\psi(t) > 0$, $f = \mathfrak{L}\{\varphi\}$, $g = \mathfrak{L}\{\psi\}$. *Если* $e^{a\rho} g(\rho) \longrightarrow \infty$, *когда* $\rho \longrightarrow \infty$ *при каждом* $a > 0$, *и если* $\varphi(t) = o(\psi(t))$, *когда* $t \longrightarrow 0$, *то* $f(x) = o(g(\rho))$ *равномерно по* $\arg x$, *когда* $x = \rho + i\sigma \longrightarrow \infty$ *в* S_Δ, $\Delta > 0$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется $a > 0$ такое, что $|\varphi| \leqslant \varepsilon\psi$ при $0 < t \leqslant a$. Запишем $\mathfrak{L}\{\varphi\}$ в виде (3), где a имеет выбранное значение. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, второй интеграл есть $O(e^{-a\rho})$ при $\rho \longrightarrow \infty$ и

$$\left|\int_0^a e^{-xt}\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^a e^{-\rho t}\psi(t)\,dt = \varepsilon g(\rho).$$

Таким образом,

$$\frac{|f(x)|}{g(\rho)} \leqslant \varepsilon + O\left(\frac{e^{-a\rho}}{g(\rho)}\right).$$

Но при достаточно больших ρ правая часть этого неравенства не превосходит 2ε. Поэтому $f(x) = o(g(\rho))$. Равномерность по $\arg x$ вытекает из того, что в области S_Δ имеем: $|x|/\rho \leqslant \operatorname{cosec}\Delta$.

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Пусть при $n = 1, \ldots, N$ *функции* $\psi_n(t)$ *принадлежат при некотором* x_0 *к* $L(x_0)$, $\psi_n(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $g_n = \mathfrak{L}\{\psi_n\}$. *Если* $\{\psi_n\}$ *является асимптотической последовательностью при* $t \longrightarrow 0$ *и* $e^{a\rho} g_n(\rho) \longrightarrow \infty$ *при всех* $a > 0$ *и всех* n, *когда* $\rho \longrightarrow \infty$, *то* $\{g_n(\rho)\}$ *является асимптотической последовательностью при* $\rho \longrightarrow +\infty$. *Если при тех же предположениях* $\varphi(t)$ *принадлежит* $L(x_0)$ *и*

$$\varphi(t) \sim \sum a_n \psi_n(t) \quad \text{до} \quad N\text{-го члена при } t < 0,$$

то

$$f(\rho) \sim \sum a_n g_n(\rho) \quad \text{до } N\text{-го члена при } \rho \longrightarrow +\infty.$$

Если, кроме того, при всех $n = 1, \ldots, N$ *функции* $g_n(\rho)/g_n$ *ограничены в* S_Δ *при достаточно больших* $|x|$, *то* $\{g_n(x)\}$ *также является асимптотической последовательностью и* $f(x) \sim \sum a_n g_n(x)$ *до* N*-го члена равномерно по* $\arg x$, *когда* $x \longrightarrow \infty$ *в* S_Δ, $\Delta > 0$.

Доказательство. Из леммы вытекает, что $g_{n+1}(\rho) = o(g_n(\rho))$, и, следовательно, $\{g_n(\rho)\}$ является асимптотической

последовательностью при $\rho \to \infty$. Чтобы доказать, что разложение функции φ является асимптотическим при $\rho \to \infty$, заменим в лемме ψ на ψ_N и φ на

$$\varphi - \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n.$$

Когда $x \to \infty$ в S_Δ, то, в силу леммы и дополнительных предположений о $g_n(x)$, имеем

$$g_{n+1}(x) = o(g_n(\rho)) = \frac{g_n(\rho)}{g_n(x)} o(g_n(x)) = o(g_n(x)).$$

Следовательно, $\{g_n(x)\}$ является асимптотической последовательностью при $x \to \infty$ в S_Δ. Дальнейшее доказательство протекает совершенно так же, как и выше.

Наиболее важным частным случаем является

$$\psi_n = t^{\lambda_n - 1}, \quad 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N.$$

Все условия теоремы выполнены; в частности,

$$g_n(x) = \Gamma(\lambda_n) x^{-\lambda_n}$$

и потому для всех x из S_Δ, $\Delta > 0$, выполняется неравенство

$$\frac{g_n(\rho)}{|g_n(x)|} \leqslant \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{\lambda_n} (\operatorname{cosec} \Delta)^{\lambda_n}.$$

Мы получаем, таким образом, следующую теорему об асимптотических рядах степеней.

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. *Если* $\varphi(t)$ *при некотором* x_0 *принадлежит* $L(x_0)$ *и*

$$\varphi \sim \sum a_n t^{\lambda_n - 1} \quad \text{до } N\text{-го члена при } t \to 0,$$

то

$$f \sim \sum \Gamma(\lambda_n) a_n x^{-\lambda_n} \quad \text{до } N\text{-го члена равномерно по } \arg x \text{ при } x \to \infty \text{ в } S_\Delta,\ \Delta > 0.$$

Отметим еще следующие примеры асимптотических последовательностей, к которым применима общая теорема:

$$\psi_n = (1 - e^{-t})^{n-1}, \quad g_n = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}, \tag{4}$$

$$\psi_n = (e^t - 1)^{n-1}, \quad g_n = \frac{(n-1)!}{x(x-1)\ldots(x-n+1)}, \tag{5}$$

$$\psi_n = \left(2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}\right)^{2n-2}, \quad g_n = \frac{(2n-2)!}{(x-n+1)(x-n+2)\ldots(x+n-1)}. \tag{6}$$

В случае асимптотических степенных рядов, равно как и в случае (4), N может быть как конечным, так и бесконечным; в случаях (5) и (6) N должно быть конечным.

Результат, полученный с помощью интегрирования по частям, является частным случаем теоремы об асимптотических рядах степеней. Если функция $\varphi(t)$ имеет при $0 \leqslant t \leqslant a$ непрерывные производные до N-го порядка включительно, то из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано вытекает, что при $t \to 0$

$$\varphi(t) \sim \sum \varphi^{(n)}(0)\, t^n/n!$$

до N-го члена. Поэтому (2) вытекает из теоремы об асимптотических степенных рядах.

Во многих случаях можно расширить область, в которой справедливо асимптотическое разложение, до области вида S_Δ, $\Delta < 0$. Если $\varphi(t)$ — аналитическая функция от t, регулярная в S_θ, и если $\varphi(t) = O(e^{at})$ для некоторого a, когда $t \to \infty$ в S_θ, то можно повернуть путь интегрирования в формуле (1) так, чтобы он стал лучом, лежащим в S_θ. Таким образом, функция $f(x)$ аналитически продолжается в некоторую область, которая содержит сектор $-\pi + \theta < \arg(x - a) < \pi - \theta$ (см., например, Дёч, 1950, стр. 362 и далее). Если $\{\varphi_n\}$ имеет соответствующие свойства вдоль каждого луча и $\varphi \sim \sum a_n \varphi_n$, когда $t \to 0$ в S_θ, то $f \sim \sum a_n g_n$, когда $x \to \infty$ в S_Δ, где $\Delta > \theta - \pi/2$. Сформулируем точную теорему для асимптотических степенных рядов.

Пусть $\varphi(t)$ — регулярная функция в S_θ, $\varphi = O(e^{at})$ равномерно по $\arg t$ при некотором a и $t \to \infty$ в S_θ,

$$\varphi \sim \sum a_n t^{\lambda_n - 1} \quad \textit{до } N\textit{-го члена}$$

равномерно по $\arg t$, когда $t \to 0$ в S_θ,

где

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N.$$

Тогда $f(x)$ существует в секторе

$$-\pi + \theta < \arg(x - a) < \pi - \theta$$

и

$$f \sim \sum a_n \Gamma(\lambda_n)\, x^{-\lambda_n} \quad \textit{до } N\textit{-го члена}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > \theta - \pi/2$.

Частный случай этого результата, когда числа λ_n образуют арифметическую прогрессию и φ может быть представ-

лено в виде сходящегося ряда

$$\sum a_n t^{\lambda_n - 1}$$

для достаточно малых $|t|$ в S_θ, известен как *лемма Ватсона*; эта лемма достаточна для большинства приложений.

На протяжении этого пункта было изучено поведение интеграла (1) при больших значениях x. Подобные методы могут быть использованы для исследования функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Относительно основной леммы см. Эрдейи (1947), а относительно некоторых наиболее важных результатов см. Дёч (1950, глава 13) и Уиддер (1941, глава 5).

2.3. Критические точки

Мы видели в последних двух пунктах, что при некоторых условиях асимптотическое поведение интегралов определяется поведением подынтегральных функций в определенных точках; например, в рассмотренных выше случаях такими точками были концы интервала. Подобные точки ван дер Корпут (1948) назвал критическими. Мы изложим сейчас некоторые методы, позволяющие находить асимптотические разложения, соответствующие основным типам критических точек.

Рассмотрим сначала интегралы вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\, e^{xh(t)}\, dt, \tag{1}$$

где x — большой положительный параметр и $h(t)$ — вещественная функция. Если $h(t)$ имеет максимум в точке $t = \tau$ и $h(t) < h(\tau)$ при $t \neq \tau$, то при больших значениях x модуль подынтегральной функции имеет резко выраженный максимум в точке, весьма близкой к точке τ. Поэтому поведение интеграла (1) при больших значениях x зависит в основном от значений функций $g(t)$ и $h(t)$ в окрестности точки τ. Интеграл может быть приближенно вычислен с помощью разложения этих функций в окрестности точки τ. Это является центральной идеей *метода Лапласа* (см. п. 2.4). Мы столкнулись с подобным случаем в п. 2.2, где $h(t) = -t$, $0 \leqslant t < \infty$, и потому $h(t)$ имело максимум при $t = 0$. В соответствии с этим мы нашли асимптотическое разложение интегралов Лапласа путем разложения функции $g(t)$ при малых значениях t.

Если x и $h(t)$ комплексны, причем $g(t)$ и $h(t)$ являются аналитическими функциями от t, то часто оказывается возможным изменить путь интегрирования так, чтобы он прошел через одну или несколько точек, в которых $h'(t)=0$. Если τ — одна из таких точек, то она является критической; в этом случае можно провести часть пути интегрирования, лежащую в окрестности точки τ так, чтобы $x[h(t)-h(\tau)]$ было вещественным на этой части. После этого интеграл может быть вычислен с помощью метода Лапласа. Описанный метод называется *римановым методом перевала* (см. п. 2.5).

Перейдем теперь к интегралам вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\, e^{ixk(t)}\, dt. \tag{2}$$

Предположим снова, что x — большой положительный параметр, а $k(t)$ — вещественная функция. В этом случае из-за быстрых колебаний функции $\exp[ixk(t)]$ происходит интерференция значений подынтегральной функции. Это не имеет места лишь на концах интервала и в стационарных точках функции $k(t)$. Поэтому в данном случае критическими точками являются концы интервала (α, β) и стационарные точки функции $k(t)$ *). Если $k(t)$ не имеет стационарных точек на интервале $\alpha<t<\beta$, то хорошее приближение, как правило, получается с помощью интегрирования по частям (п. 2.1). Для оценки вклада, получаемого от окрестности стационарной точки τ, применяется *метод стационарной фазы Стокса* (п. 2.9), основанный на разложении функций g и h в окрестности этой точки.

Метод стационарной фазы был распространен ван дер Корпутом (1936) на интегралы вида (1), где $xh(t)$ может быть любой комплексной функцией (в методе стационарной фазы эта функция должна быть чисто мнимой). Согласно ван дер Корпуту, в этом случае критическими являются точки τ, в которых функция $x^{1/2}h'(t)[h''(t)]^{-1/2}$ вещественна, причем мнимая часть этой функции меняет знак при

*) Легко видеть, что около концов интервала не происходит полной интерференции значений подынтегральной функции, а в стационарных точках функции $k(t)$ функция $\exp[ixk(t)]$ медленно меняется. (*Прим. перев.*)

переходе t через τ. (В случае интеграла (2) $h=ik$, где k — вещественно, а потому единственными точками, в которых функция

$$x^{1/2}h'(h'')^{-1/2}=(ix)^{1/2}k'(k'')^{-1/2}$$

вещественна, являются стационарные точки функции k.)

2.4. Метод Лапласа

Пусть в интеграле

$$f(x)=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,e^{xh(t)}\,dt \tag{1}$$

$h(t)$ является вещественной функцией вещественного переменного t, функция $g(t)$ может быть как вещественной, так и комплексной, а x — большое положительное переменное. По Лапласу, основной вклад в интеграл дают окрестности тех точек интервала $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, в которых $h(t)$ принимает наибольшее значение. Если $h(t)$ имеет конечное число максимумов, то интервал (α,β) можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция $h(t)$ принимает максимальное значение в одной из концевых точек и не принимает его в других точках. Поэтому мы можем считать, что в интеграле (1) функция $h(t)$ имеет максимум при $t=\alpha$, причем $h(t)<h(\alpha)$ при $\alpha<t\leqslant\beta$.

Предположим, что функция g непрерывна, а функция h обладает непрерывной производной второго порядка, $h'(\alpha)=0$, $h''(\alpha)<0$. Введем новое переменное u, определяемое равенством $h(\alpha)-h(t)=u^2$. При достаточно малом η функция $h'(t)$ отрицательна в интервале $\alpha<t<\alpha+\eta$. При $x\rightarrow\infty$ имеем

$$f(x)\sim\int_{\alpha}^{\alpha+\eta} g(t)\,e^{xh(t)}\,dt=$$

$$=-\int_{0}^{U} 2u\frac{g(t)}{h'(t)}\left\{\exp x\left[h(\alpha)-u^2\right]\right\}du,$$

где $U=[h(\alpha)-h(\alpha+\eta)]^{1/2}>0$. Так как существенным яв-

ляется лишь значение подынтегральной функции в окрестности точки $u=0$, мы можем приближенно заменить $g(t)$ на $g(\alpha)$, а выражение $u/h'(t)$ — его пределом при $t \to \alpha$, то есть значением $-[-2h''(\alpha)]^{-1/2}$. Мы получим при этом

$$f(x) \sim \left[\frac{-2}{h''(\alpha)}\right]^{1/2} g(\alpha) \int\limits_0^U \{\exp[-xu^2 + xh(\alpha)]\}\, du.$$

В силу тех же соображений, можно заменить интервал интегрирования интервалом $[0, \infty)$. Это приводит к формуле Лапласа

$$f(x) \sim g(\alpha)\, e^{xh(\alpha)} \left[\frac{-\pi}{2xh''(\alpha)}\right]^{1/2}, \quad x \to \infty. \tag{2}$$

Буркхардт (1914) и Перрон (1917) показали, что этот результат может быть доказан с помощью разложений функций g и h в окрестности точки α. Копсон (1946) воспроизвел простое доказательство Пойа и Сеге, а Уиддер (1941, глава VII) дал более сложное доказательство при более общих предположениях. Дальнейшие обобщения формулы Лапласа были получены Су (1949a, b; 1951a, b), Леви (1946) и Руни (1953). Метод Лапласа был использован для интегралов, зависящих от двух больших переменных, Фальксом (1951) и Томсоном (1954), а к двойным и кратным интегралам применен Су (1948a, b; 1951c) и Руни (1953).

Приводимое ниже обобщение результата Лапласа может быть выведено из установленных выше свойств интегралов Лапласа. *Пусть g и h — функции, заданные на интервале* (α, β), *такие, что интеграл* (1) *существует при достаточно больших положительных значениях x. Пусть, далее, функция h вещественна, непрерывна при $t=\alpha$, имеет непрерывную производную при $\alpha < t \leqslant \alpha + \eta$, $\eta > 0$, причем $h' < 0$ при $\alpha < t < \alpha + \eta$, $h(t) \leqslant h(\alpha) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $\alpha + \eta \leqslant t \leqslant \beta$; наконец, пусть $h'(t) \sim -a(t-\alpha)^{\nu-1}$ и $g(t) \sim b(t-\alpha)^{\lambda-1}$ при $t \to \alpha$, где $\lambda > 0$, $\nu > 0$. Тогда*

$$f(x) = \int\limits_\alpha^\beta g(t)\, e^{xh(t)}\, dt \sim \frac{b}{\nu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \left(\frac{\nu}{ax}\right)^{\lambda/\nu} e^{xh(\alpha)}. \tag{3}$$

Для доказательства заметим сначала, что

$$\left|\int\limits_{\alpha+\eta}^{\beta} g(t)\, e^{xh(t)}\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{x[h(\alpha)-\varepsilon]\} \int\limits_{\alpha+\eta}^{\beta} |g(t)|\, dt =$$

$$= o\left[x^{-\lambda/\nu} e^{xh(\alpha)}\right], \quad x\to\infty. \qquad (4)$$

На интервале $(\alpha, \alpha+\eta)$ введем новую переменную $u=h(\alpha)-h(t)$ и положим $U=h(\alpha)-h(\alpha+\eta)>0$, $k(u)=-g(t)/h'(t)$. Мы получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} g(t)\, e^{xh(t)}\, dt = e^{xh(\alpha)} \int\limits_{0}^{U} k(u)\, e^{-xu}\, du. \qquad (5)$$

Но

$$u=h(\alpha)-h(t)=-\int\limits_{\alpha}^{t} h'(\tau)\, d\tau \sim \frac{a}{\nu}(t-\alpha)^{\nu}, \quad t\to\alpha,$$

и потому

$$t-\alpha \sim \left(\frac{u\nu}{a}\right)^{1/\nu}, \quad u\to 0.$$

Итак,

$$-\frac{g(t)}{h'(t)} \sim \frac{b}{a}(t-\alpha)^{\lambda-\nu}, \quad t\to\alpha,$$

и, следовательно,

$$k(u) \sim \frac{b}{a}\left(\frac{u\nu}{a}\right)^{\lambda/\nu-1}, \quad u\to 0. \qquad (6)$$

В силу полученных выше результатов об асимптотическом поведении интегралов Лапласа, из соотношений (5) и (6) имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\eta} g(t)\, e^{xh(t)}\, dt \sim$$

$$\sim \frac{b}{\nu}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\lambda/\nu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) x^{-\lambda/\nu} e^{xh(\alpha)}, \quad x\to\infty. \qquad (7)$$

Из соотношений (4) и (7) и вытекает асимптотическое равенство (3). Заметим, кроме того, что соотношения (4) и (7),

а следовательно, и соотношение (3), остаются справедливыми, если x является комплексным переменным и $x \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > 0$.

Покажем теперь, как получается асимптотическое разложение функции $f(x)$. В нижеследующих формулах положено $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Если

$$\begin{aligned} -h'(t) &\sim \sum a_n (t-\alpha)^{\nu+n-1}, \\ g(t) &\sim \sum b_n (t-\alpha)^{\lambda+n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

до N-го члена при $t \to \alpha$, то справедливо разложение

$$-\frac{g(t)}{h'(t)} \sim \sum c_n (t-\alpha)^{\lambda-\nu+n} \quad \text{до } N\text{-го члена при } t \to \alpha. \tag{9}$$

Коэффициенты c_n в этом равенстве могут быть вычислены с помощью формального деления. Таким образом,

$$u = -\int_\alpha^t h'(\tau)\, d\tau \sim \sum \frac{a_n}{\nu+n} (t-\alpha)^{\nu+n}$$
$$\text{до } N\text{-го члена при } t \to \alpha. \tag{10}$$

Из полученного выражения вытекает, что $u^{1/\nu}$ может быть разложено в асимптотический ряд по степеням $t-\alpha$. Подставляя этот асимптотический ряд в соотношение (9), получим асимптотическое разложение вида

$$k(u) \sim \sum \gamma_n u^{(\lambda+n-\nu)/\nu} \quad \text{до } N\text{-го члена при } u \to \infty. \tag{11}$$

Используя соотношение (11) вместо соотношения (6), получим асимптотическое разложение до N-го члена для интеграла (5); кроме того, оценка (4) может быть заменена более точной оценкой $o(x^{-(\lambda+N)/\nu} e^{xh(\alpha)})$. Таким образом,

$$f(x) \sim e^{xh(\alpha)} \sum \gamma_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{\nu}\right) x^{-(\lambda+n)/\nu} \tag{12}$$

до N-го члена, когда $x \to \infty$ в S_Δ, $\Delta > 0$. Коэффициенты γ_n могут быть вычислены с помощью формальной подстановки согласно описанной выше схеме.

Существует другой метод вычисления коэффициентов γ_n, позволяющий избежать обращения асимптотического ряда (10) для получения разложения $u^{1/\nu}$ по степеням $t-\alpha$. Именно,

из соотношения (10) имеем:

$$h(t) = h(\alpha) - \frac{a_0}{\nu}(t-\alpha)^\nu + h_1(t),$$

где

$$h_1(t) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{\nu+n}(t-\alpha)^{\nu+n} + o\left((t-\alpha)^{\nu+N-1}\right).$$

Полагая

$$\int_\alpha^{\alpha+\eta} g(t)\, e^{xh(t)}\, dt = e^{xh(\alpha)} \int_\alpha^{\alpha+\eta} l(t) \exp\left[-\frac{a_0}{\nu} x (t-\alpha)^\nu\right] dt,$$

разлагая формально функцию

$$l(t) = g(t) \exp\left[xh_1(t)\right]$$

по степеням $t-\alpha$ и интегрируя почленно, мы приходим к разложению (12). Можно доказать соотношение (12), используя эту схему.

2.5. Метод перевала

Рассмотрим интеграл

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(t)\, e^{xh(t)}\, dt, \tag{1}$$

где x — большое комплексное переменное, g и h — аналитические функции комплексного переменного t, а интеграл берется вдоль некоторого пути в комплексной t-плоскости. Этот интеграл может быть асимптотически вычислен с помощью метода перевала, впервые введенного Риманом и развитого Дебаем. Копсон (1946) дал подробное описание этого метода, приведя многочисленные ссылки и примеры.

Точки t-плоскости, в которых $h'(t) = 0$, называются ***точками перевала или седловинами.*** Поверхность, изображающая $|\exp[xh(t)]|$ как функцию от t и $\operatorname{Im} t$, называется ***рельефом*** функции e^{xh}; на этой поверхности точки, в кото-

рых $h'(t)=0$, являются точками перевала, и наиболее удобный путь из одной «долины» в другую ведет через один или несколько перевалов. Пусть τ является точкой перевала; если $h'(\tau)=h''(\tau)=\ldots=h^{(m)}(\tau)=0$ и $h^{(m+1)}(\tau)\neq 0$, то τ называется точкой перевала порядка m. Кривые на плоскости t, вдоль которых $\operatorname{Re} xh(t)$ имеет постоянное значение, называются *линиями уровня*: вдоль таких кривых функция e^{xh} имеет постоянный модуль (эти линии являются горизонталями рельефа), фаза же функции e^{xh} меняется вдоль линий уровня быстрее всего. Линии, вдоль которых $\operatorname{Im} xh(t)$ постоянно, называются *линиями стока*: вдоль таких линий e^{xh} имеет постоянную фазу, а $|e^{xh}|$ изменяется быстрее всего (эти линии являются градиентными линиями рельефа). В точке перевала τ порядка m пересекаются под равными углами $m+1$ линия уровня; эти углы делятся пополам $m+1$ линией стока; вдоль каждой из линий стока τ является стационарной точкой функции $|e^{xh(t)}|$.

Метод перевала состоит в том, что путь интегрирования деформируется так, чтобы он, насколько это возможно, состоял из дуг линий стока. Если α и β лежат на линии стока, проходящей через перевал, например, если α и β являются особыми точками функции $h(t)$, то путь интегрирования можно деформировать так, чтобы он полностью совпал с линией стока, проходящей через перевалы; в противном случае могут встретиться две линии стока, не проходящие через перевалы. Последний случай может быть описан с помощью рельефа следующим образом: сначала мы спускаемся вдоль линии стока в особую точку, а потом вдоль другой линии стока поднимаемся на перевал. Функция $xh(t)$ монотонна вдоль всей линии стока (исключая перевалы), а потому для асимптотического вычисления интеграла может быть применен метод Лапласа. Асимптотические разложения функций g и h, необходимые для применения теоремы предыдущего пункта, суть не что иное, как тейлоровские разложения этих функций в окрестности точки линии стока, в которой $xh(t)$ достигает наибольшего значения (эта точка часто совпадает с точкой перевала). Обращение ряда 2.4(10) может быть выполнено с помощью формулы Лагранжа (см., например, Маркушевич, 1950, стр. 342).

Мейер (1933a, b) показал, что оценка погрешности может быть получена с помощью разложения по формуле

Лагранжа с остаточным членом. Он показал также, что в некоторых случаях можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов.

Мы рассмотрим сейчас ряд примеров на применение метода перевала; эти примеры заимствованы из работы Копсона (1946).

2.6. Интеграл Эйри

Мы изучим сейчас асимптотическое поведение интеграла

$$Ai(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3+zs\right)ds \qquad (1)$$

при больших значениях z. Подстановка

$$s=z^{1/2}t, \quad x=z^{3/2} \qquad (2)$$

приводит этот интеграл к виду

$$Ai(x^{2/3})=\frac{x^{1/3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ix\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)\right]dt. \qquad (3)$$

К этому интегралу может быть применен метод перевала. Будем рассматривать в интеграле (3) t как комплексное переменное интегрирования. При $x>0$ путем интегрирования является вещественная ось t. Этот путь можно деформировать в кривую, которая начинается в бесконечно удаленной точке, проходит по сектору $2\pi/3<\arg t<\pi$, переходит в сектор $0<\arg t<\pi/3$ и заканчивается в бесконечно удаленной точке. В нашем случае

$$h(t)=i\left(\frac{1}{3}t^3+t\right), \quad h'(t)=i(t^2+1).$$

Поэтому перевалами являются точки $t=\pm i$ (нули функции $h'(t)$). Линии стока определяются равенством $\operatorname{Im} h(t)=\text{const}$. Полагая $t=\xi+i\eta$, получим

$$\operatorname{Im} h(t)=\frac{1}{3}\xi^3-\xi\eta^2+\xi, \quad \operatorname{Im} h(\pm i)=0.$$

Поэтому уравнение линии стока имеет вид

$$\xi(\xi^2 - 3\eta^2 + 3) = 0. \tag{4}$$

Это уравнение вырожденной кривой третьего порядка, состоящей из мнимой оси и двух ветвей гиперболы. На рис. 1 стрелками обозначены направления, вдоль которых $\operatorname{Re} h(t)$ убывает. Асимптотами гиперболы являются линии $\xi \pm \eta\sqrt{3} = 0$, и, очевидно, путь интегрирования в выражении (3) можно деформировать так, чтобы он превратился в верхнюю ветвь гиперболы и шел, таким образом, из точки $\infty \cdot \exp(5\pi i/6)$ в $\infty \cdot \exp(i\pi/6)$. Вдоль этого пути интеграл (3) сходится, если $\operatorname{Re} x > 0$.

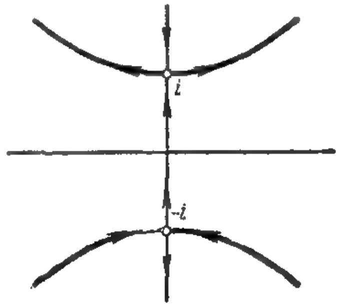

Рис. 1.

Положим

$$2\pi x^{-1/3} Ai(x^{2/3}) = \int_i^{\infty \cdot \exp(i\pi/6)} - \int_i^{\infty \cdot \exp(5i\pi/6)} e^{xh(t)}\,dt = I_1 - I_2 \tag{5}$$

и применим к интегралам I_1, I_2 метод Лапласа. В обоих интегралах функция $h(t) - h(i)$ вещественна и достигает максимума в точке $t = i$; следовательно, $h(t) - h(i)$ является убывающей функцией. Введем новую переменную u, положив

$$u = h(i) - h(t) = -\frac{2}{3} - i\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) = (t-i)^2 - \frac{1}{3}i(t-i)^3. \tag{6}$$

Из (6) вытекает

$$\pm u^{1/2} = (t-i)\left[1 - \frac{1}{3}i(t-i)\right]^{1/2}, \tag{7}$$

где $u^{1/2}$ — положительный квадратный корень, а $[\ldots]^{1/2}$ — ветвь функции, которая равна единице в точке $t = i$; верхний знак в (7) относится к I_1, а нижний знак — к I_2. Из теоремы Лагранжа вытекает, что в достаточно малой окрестности точки перевала $t = i$ обладает разложением

вида $t-i=\sum b_n(\pm u^{1/2})^n$, где nb_n — коэффициент при $(t-i)^{n-1}$ в разложении $[1-i(t-i)/3]^{-n/2}$ по степеням $t-i$. Таким путем получаются разложения

$$t-i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}\Gamma(3n/2-1)}{n!\,\Gamma(n/2)\,3^{n-1}}(\pm u^{1/2})^n, \tag{8}$$

где верхние и нижние знаки относятся, соответственно, к I_1 и I_2. Но

$$e^{-xh(i)}I_{1,2}=\int_0^{\infty}e^{-xu}\frac{dt}{du}\,du$$

и, в силу п. 2.4, асимптотические разложения интегралов I_1 и I_2 получаются путем подстановки разложений (8) в dt/du и последующего почленного интегрирования. Таким образом,

$$e^{2x/3}I_{1,2}=\int_0^{\infty}e^{-xu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n i^{n-1}\Gamma(3n/2-1)}{2(n-1)!\,\Gamma(n/2)\,3^{n-1}}u^{n/2-1}\,du\sim$$
$$\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n i^{n-1}\Gamma(3n/2-1)}{2(n-1)!\,3^{n-1}x^{n/2}}.$$

Подставляя это разложение в (5) и выражая полученный результат через z, получаем после некоторых упрощений разложение

$$Ai(z)\sim\frac{1}{2\pi z^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3m+1/2)}{(2m)!}(-9z^{3/2})^{-m}. \tag{9}$$

Это асимптотическое разложение справедливо равномерно по $\arg z$, когда $z\to\infty$ в области $|\arg z|\leqslant\pi/3-\Delta$, $\Delta>0$.

2.7. Дальнейшие примеры

Мы рассмотрим теперь два примера, в которых пределы интегрирования не являются особыми точками и поэтому асимптотические разложения не могут быть получены с помощью разложений в окрестности перевала. Кроме того, во втором примере перевалы имеют второй порядок.

Первый пример таков. Пусть $x > 0$ и

$$f(x) = \int_0^\infty \exp\left[ix\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\right] dt. \tag{1}$$

Функция $h(t)$ в этом примере та же самая, что и в п. 2.6, а потому линии стока совпадают с изображенными на рисунке в п. 2.6. Легко видеть, что соответствующий путь интегрирования состоит из части мнимой оси между точками 0 и i и половины верхней ветви гиперболы. Таким образом,

$$f(x) = \int_0^i + \int_i^{\infty\cdot\exp(i\pi/6)} e^{xh(t)}\,dt. \tag{2}$$

Асимптотическое разложение второго интеграла было уже получено выше. В первом интеграле функция $h(t)$ вещественна и убывает, когда t изменяется от 0 до i, поэтому снова можно применить метод Лапласа. В соответствии с этим методом положим

$$u = h(0) - h(t) = -it\left(1 + \frac{1}{3}t^2\right).$$

Из теоремы Лагранжа вытекает, что $-it = \sum b_n u^n$, где nb_n является коэффициентом при $(-it)^{n-1}$ в разложении $(1 + t^2/3)^{-n}$ по степеням $-it$. Очевидно, что $b_n = 0$, если n четно и

$$-it = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!\,u^{2m+1}}{m!\,(2m+1)!\,3^m}.$$

Подставляя это выражение в первый интеграл равенства (2) и интегрируя почленно, получаем

$$\int_0^i e^{xh(t)}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2/3} e^{-xu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!\,u^{2m}}{m!\,(2m)!\,3^m}\,du \sim i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{m!\,3^m}.$$

Из результатов п. 2.6 вытекает, что второй интеграл формулы (2) экспоненциально мал по сравнению с первым. Мы

получили, таким образом, следующий результат:

$$\int_0^\infty \exp\left[ix\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)\right]dt \sim i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(3m)!}{m!\,3^m}x^{-2m-1} \tag{3}$$

при $x\to\infty$ в S_Δ, $\Delta>0$.

В заключение рассмотрим интеграл

$$f(x)=\int_0^1 \exp(ixt^3)\,dt, \tag{4}$$

где $x>0$. Здесь $h(t)=it^3$ и $t=0$ является перевалом второго порядка. Линии стока, проходящие через перевал,

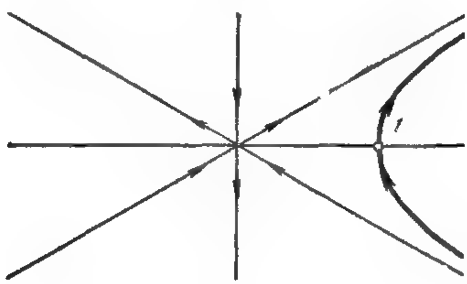

Рис. 2.

задаются равенством $\operatorname{Im}(it^3)=0$, то есть являются линиями $t=\pm\pi/6$, $\pm\pi/2$, $\pm5\pi/6$. На рис. 2 стрелками указаны направления убывания функции $|\exp(ixt^3)|$ при $x>0$. Ни одна из этих линий стока не проходит через точку $t=1$. Уравнение линии стока, проходящей через точку $t=1$, имеет вид $\operatorname{Im}(it^3)=1$. Полагая $t=\xi+i\eta$, можно записать это уравнение в виде $\xi^3-3\xi\eta^2=1$. Это — кривая третьего порядка, ветвь которой, проходящая через точку $t=1$, изображена на рисунке. Для того чтобы перейти из точки 0 в точку 1 вдоль линий стока, мы интегрируем сначала от 0 до ∞ вдоль линии $\arg t=\pi/6$, а потом от ∞ до 1 вдоль верхней половины ветви кривой третьего порядка. В соот-

ветствии с этим мы получим

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty\cdot\exp(\pi i/6)}-\int\limits_1^{\infty\cdot\exp(\pi i/6)}\exp(ixt^3)\,dt=I_1-I_2. \qquad (5)$$

В I_1 положим $u=-it^3$ или $t=u^{1/3}e^{\pi i/6}$, где $u^{1/3}>0$, и получим

$$I_1=\frac{1}{3}e^{i\pi/6}\int\limits_0^{\infty}e^{-xu}u^{-2/3}du=\Gamma(4/3)\,e^{i\pi/6}x^{-1/3}. \qquad (6)$$

В I_2 положим $u=-i(t^3-1)$ или $t=(1+iu)^{1/3}$ и получим

$$I_2=\frac{1}{3}i\int\limits_0^{\infty}e^{ix-xu}(1+iu)^{-2/3}\,du.$$

Разлагая $(1+iu)^{-2/3}$ по формуле бинома, имеем

$$I_2\sim\frac{1}{\Gamma(-1/3)}e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(n+2/3)\,(ix)^{-n-1}. \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем, наконец,

$$\int\limits^{1}\exp(ixt^3)\,dt\sim\Gamma(4/3)\,e^{i\pi/6}x^{-1/3}-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(-1/3)}e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(n+2/3)\,(ix)^{-n-1} \qquad (8)$$

при $x\to\infty$ в S_Δ, $\Delta>0$.

Последнее равенство описывает асимптотическое поведение функции $f(x)$, когда $x\to\infty$ в правой полуплоскости. Если $x\to\pm i\infty$, то подынтегральная функция в равенстве (4) вещественна и можно применить метод Лапласа. Наконец, если $x\to\infty$ в левой полуплоскости, то можно применить соотношение

$$f(x)=\overline{f(-\bar{x})},$$

вытекающее из (4), где черточка означает переход к комплексно сопряженному выражению.

2.8. Интегралы Фурье

Интегралы вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

называются *интегралами Фурье.* Мы будем считать здесь, что (α, β) является вещественным интервалом, как правило, конечным; функция $\varphi(t)$ предполагается интегрируемой, так что интеграл (1) существует при всех вещественных x. Мы изучим асимптотическое поведение интеграла (1) при $x \to +\infty$; чтобы получить асимптотическое поведение при $x \to -\infty$, достаточно заменить t на $-t$. В отличие от интегралов Лапласа (п. 2.2), в рассматриваемом случае единственным эффективным методом для получения разложений является повторное интегрирование по частям; лишь в случае, когда $\varphi(t)$ — аналитическая функция, может быть применен метод перевала.

Докажем сначала следующее утверждение. *Если функция $\varphi(t)$ имеет на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ непрерывные производные до N-го порядка включительно, то*

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}\varphi(t)\,dt = B_N(x) - A_N(x) + o(x^{-N}), \quad x \to \infty, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} A_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} i^{n-1}\varphi^{(n)}(\alpha)\,x^{-n-1}e^{ix\alpha}, \\ B_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} i^{n-1}\varphi^{(n)}(\beta)\,x^{-n-1}e^{ix\beta} \end{aligned} \tag{3}$$

а $\varphi^{(n)} = d^n\varphi/dt^n$. Этот результат остается справедливым, если $\alpha = -\infty$ (или $\beta = \infty$) при условии, что $\varphi^{(n)}(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ (или $t \to \infty$) для всех $n = 0, 1, \ldots, N-1$, причем $\varphi^{(N)}(t)$ является интегрируемой функцией на (α, β).

Чтобы доказать это утверждение, применим формулу 2.1(5), положив $g = \varphi$, $g_n = \varphi^{(n)}$, $h = e^{ixt}$, $h_{-n} = (ix)^{-n}e^{ixt}$. Для остаточного члена получаем

$$R_N = (-ix)^{-N}\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}\varphi^{(N)}(t)\,dt.$$

Так как при $x \to \infty$ интеграл по лемме Римана стремится к нулю, то $R_N = o(x^{-N})$.

Заметим, что если функция φ и ее первые $N-1$ производных обращаются в нуль в точке α (например, если φ тождественно обращается в нуль в некоторой окрестности точки α), то $A_N(x)=0$; точно так же $B_N(x)=0$, если функция φ и ее первые $N-1$ производных обращаются в нуль в точке β (например, если φ обращается в нуль в некоторой окрестности точки β).

Перейдем теперь к рассмотрению интегралов Фурье, в которых подынтегральная функция имеет особенности простого типа на одном из концов интервала.

Пусть функция $\varphi(t)$ *имеет на отрезке* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *непрерывные производные до N-го порядка включительно*; $\varphi^{(n)}(\beta)=0$ *при* $n=0,1, \ldots, N-1$ *и* $0<\lambda<1$. *Тогда*

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(t)\,dt = -A_N(x) + O(x^{-N}), \quad x \to \infty, \tag{4}$$

где

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!} e^{\pi i(n+\lambda-2)/2}\varphi^{(n)}(\alpha)\,x^{-n-\lambda}e^{ix\alpha}. \tag{5}$$

Пусть функция $\varphi(t)$ *имеет на отрезке* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *непрерывные производные до N-го порядка включительно*; $\varphi^{(n)}(\alpha)=0$ *при* $n=0,1, \ldots, N-1$ и $0<\mu<1$. *Тогда*

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(\beta-t)^{\mu-1}\varphi(t)\,dt = B_N(x) + O(x^{-N}), \quad x \to \infty, \tag{6}$$

где

$$B_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\mu)}{n!} e^{\pi i(n-\mu)/2}\varphi^{(n)}(\beta)\,x^{-n-\mu}e^{ix\beta}. \tag{7}$$

При $\lambda=1$ равенство (5) превращается в первое из равенств (3), а при $\mu=1$ равенство (7) превращается во второе из равенств (3); однако O-члены в (4) и (6) дают меньшую информацию, чем o-члены в равенстве (2). Вместо $O(x^{-N})$ можно писать $o(x^{-N-\lambda+1})$ в (4) и $o(x^{N-\mu+1})$ в (6); эта форма записи остается справедливой при $\lambda=1$ или $\mu=1$ соответственно.

Докажем равенство (4). Применим формулу 2.1(5), положив $g(t)=\varphi(t)$, $g_n(t)=\varphi^{(n)}(t)$, $h(t)=h_0(t)=e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}$ и

$$h_{-n-1}(t)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_t^{i\infty}(u-t)^n(u-\alpha)^{\lambda-1}e^{ixu}\,du, \tag{8}$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

В равенстве (8) мы считаем $t>\alpha$ и выбираем путь интегрирования, целиком расположенный в квадранте $0\leqslant\arg(u-\alpha)\leqslant\leqslant\pi/2$. Интеграл абсолютно сходится, и

$$\frac{d}{dt}h_{-n-1}(t)=h_{-n}(t),\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Если выбрать в качестве пути интегрирования луч $u=t+i\sigma$, $\sigma>0$, то получим $|u-\alpha|\geqslant t-\alpha$, $|u-\alpha|^{\lambda-1}\leqslant(t-\alpha)^{\lambda-1}$ при $0<\lambda\leqslant 1$; следовательно,

$$|h_{-n-1}(t)|\leqslant\frac{(t-\alpha)^{\lambda-1}}{n!}\int_t^{t+i\infty}|u-t|^n\,|e^{ixu}\,du|.$$

Подставляя $u=t+i\sigma$, получаем

$$|h_{-n-1}(t)|\leqslant(t-\alpha)^{\lambda-1}x^{-n-1};\quad t>\alpha,\ x>0. \tag{9}$$

Далее, из равенства (8) вытекает

$$h_{-n-1}(\alpha)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_\alpha^{\alpha+i\infty}(u-\alpha)^{n+\lambda-1}e^{ixu}\,du,$$

и, полагая $u=\alpha+i\sigma$, $\sigma\geqslant 0$, имеем

$$h_{-n-1}(\alpha)=(-1)^{n+1}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!}e^{\pi i(n+\lambda)/2}x^{-n-\lambda}e^{ix\alpha}, \tag{10}$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots$$

Мы можем теперь применить формулу 2.1(5). Члены в s_N, зависящие от β, обращаются в нуль, так как $\varphi^{(n)}(\beta)=0$. Из (10) вытекает, что $\sum s_n=-A_N$, где A_N задается формулой (5). Кроме того, из 2.1(7) следует

$$R_N=(-1)^N\int_\alpha^\beta\varphi^{(N)}(t)\,h_{-N}(t)\,dt,$$

и потому, в силу (9),

$$|R_N| \leqslant x^{-N} \int_\alpha^\beta |\varphi^{(N)}(t)|\,(t-\alpha)^{\lambda-1}\,dt = O(x^{-N}).$$

Тем самым равенство (4) доказано; равенство (6) доказывается аналогично.

Рассмотрим, наконец, интегралы Фурье, в которых подынтегральные функции имеют особенности на обоих концах интервала.

Если функция $\varphi(t)$ имеет на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ непрерывные производные до N-го порядка включительно и $0 < \lambda \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, то

$$\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\varphi(t)\,dt = \\ = B_N(x) - A_N(x) + O(x^{-N}), \quad x \to \infty, \tag{11}$$

где

$$A_N(x) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!}\, e^{i(n+\lambda-2)/2}\, x^{-n-\lambda} e^{ix\alpha} \frac{d^n}{d\alpha^n}\left[(\beta-\alpha)^{\mu-1}\varphi(\alpha)\right], \tag{12}$$

$$B_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\mu)}{n!}\, e^{\pi i(n-\mu)/2}\, x^{-n-\mu} e^{ix\beta} \frac{d^n}{d\beta^n}\left[(\beta-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(\beta)\right].$$

Если $\lambda = \mu = 1$, то $O(x^{-N})$ в формуле (11) можно заменить на $o(x^{-N})$.

Эта теорема содержит три полученных ранее результата как частные случаи. Чтобы доказать равенство (11), мы используем часто применяемый для аналогичных целей прием. Введем функцию $\nu(t)$, которую ван дер Корпут называет *нейтрализатором*. Эта функция $\nu(t)$ бесконечно дифференцируема на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $\nu(\alpha) = 1$, $\nu^{(n)}(\alpha) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\nu^{(n)}(\beta) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Примером такой функции является

$$\frac{\displaystyle\int_t^\beta \exp\left(-\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{\beta-u}\right) du}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \exp\left(-\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{\beta-u}\right) du}.$$

Пусть $\nu(t)$ — нейтрализатор. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\left[\nu(t)(\beta-t)^{\mu-1}\varphi(t)\right]dt +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(\beta-t)^{\mu-1}\left\{[1-\nu(t)](t-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(t)\right\}dt. \quad (13)$$

Первый интеграл в правой части этого равенства получается из интеграла (4) заменой $\varphi(t)$ на $[\ldots]$; так как все производные этой функции обращаются в нуль при $t=\beta$ и равны соответствующим производным функции $(\beta-t)^{\mu-1}\varphi(t)$ при $t=\alpha$, то мы получаем выражение (12) для $A_N(x)$. Точно так же второй интеграл в правой части равенства (13) получается из интеграла (6) заменой $\varphi(t)$ на $\{\ldots\}$; все производные $\{\ldots\}$ обращаются в нуль при $t=\alpha$ и равны соответствующим производным $(t-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(t)$ при $t=\beta$; поэтому из равенства (7) получаем выражение (12) для $B_N(x)$. Тем самым формула (11) доказана. Если $\lambda=\mu=1$, то из равенства (2) вытекает, что $O(x^{-N})$ можно заменить на $o(x^{-N})$.

Все наши результаты остаются справедливыми, если во всех формулах i заменить на $-i$, а в равенстве (7) выбрать путь интегрирования от t до $-i\infty$ так, чтобы он целиком лежал в квадранте $-\pi/2 \leqslant \arg(u-\alpha) \leqslant 0$. Таким образом, получается описание поведения наших интегралов при $x \to -\infty$ и тем самым асимптотическое поведение интегралов Фурье с тригонометрическими ядрами $\cos xt$ и $\sin xt$.

2.9. Метод стационарной фазы

Рассмотрим теперь интеграл

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,e^{ixh(t)}\,dt, \quad (1)$$

где x — большое положительное переменное и $h(t)$ — вещественная функция вещественного переменного t. Согласно Стоксу и Кельвину, основной вклад в асимптотическое пове-

дение этого интеграла дают окрестности концов интервала и точек, в которых функция $h(t)$ стационарна, то есть $h'(t)=0$; при этом, вообще говоря, вклад в главный член асимптотического разложения точек, где $h'(t)=0$ более существен, чем вклад концов интервала.

Предположим, что функция g непрерывна, а функция h имеет непрерывную производную второго порядка; пусть τ — единственная стационарная точка функции h, $\alpha<\tau<\beta$, $h'(\tau)=0$ и $h''(\tau)>0$. Поскольку мы предполагаем, что основной вклад в значение интеграла дает окрестность точки τ, введем новую переменную интегрирования u с помощью подстановки $h(t)-h(\tau)=u^2$. Мы получим

$$f(x)\sim\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} g(t)\,e^{ixh(t)}\,dt=$$

$$=\int_{-u_1}^{u_2} 2u\frac{g(t)}{h'(t)}\exp\{ix[h(\tau)+u^2]\}\,du,$$

где $u_1=[h(\tau-\varepsilon)-h(\tau)]^{1/2}$, $u_2=[h(\tau+\varepsilon)-h(\tau)]^{1/2}$. Так как лишь окрестность точки $u=0$ имеет существенное значение, можно заменить $g(t)$ на $g(\tau)$ и выражение $2u/h'(t)$ его пределом при $t\to\tau$, то есть выражением $[2/h''(\tau)]^{1/2}$. Мы получаем

$$f(x)\sim\left[\frac{2}{h''(\tau)}\right]^{1/2} g(\tau)\int_{-u_1}^{u_2}\exp[ixu^2+ixh(\tau)]\,du.$$

В силу тех же соображений можно заменить интервал интегрирования интервалом $(-\infty,\infty)$. Это приводит к формуле

$$f(x)\sim\left[\frac{2\pi}{xh''(\tau)}\right]^{1/2} g(\tau)\exp[ixh(\tau)+i\pi/4],\quad x\to\infty, \tag{2}$$

которая по существу и является результатом Кельвина. Вклад в интеграл точки стационарной фазы τ более важен, чем вклад концевых точек, поскольку с помощью интегрирования по частям можно показать, что если $h'(\alpha)\neq0$, $h'(\beta)\neq0$, то вклад концевых точек есть $O(x^{-1})$.

Принцип стационарной фазы применялся во многих математических и физических задачах, но его трудно сформулировать

точным образом. По-видимому, наиболее пригодная теорема была дана Ватсоном (1920). Пуанкаре исследовал применение принципа стационарной фазы к интегралам, содержащим аналитические функции; связь его работы с методом перевала указана в книге Копсона (1946). Метод стационарной фазы был также исследован Бийлом (1937) и в значительно более общем виде ван дер Корпутом (1934, 1936).

Мы применим проведенное в предыдущем пункте исследование интегралов Фурье, чтобы доказать теорему, которую можно рассматривать как точную формулировку и в то же время обобщение равенства (2). Назовем *стационарной точкой порядка* m, $m=1, 2, \ldots$, точку τ, в которой $h'(\tau)=h''(\tau)=\ldots=h^{(m)}(\tau)=0$ и $h^{(m+1)}(\tau)\neq 0$. В окрестности такой точки $h'(t)=(t-\tau)^m h_1(t)$, где $h_1(\tau)\neq 0$. Можно ввести и стационарные точки дробного порядка. Точка τ называется *стационарной точкой (дробного) порядка* μ, если в некоторой окрестности этой точки $h'(t)$ имеет либо вид $|t-\tau|h_1(t)$, либо вид $(t-\tau)|t-\tau|^{\mu} h_1(t)$, где $h_1(\tau)\neq 0$. Если функция $h(t)$ имеет на рассматриваемом интервале лишь конечное число стационарных точек положительного порядка, то можно представить интеграл в виде суммы конечного числа интегралов, в каждом из которых функция $h(t)$ монотонна; не теряя общности, можно считать эту функцию *возрастающей*. Поэтому мы ограничимся рассмотрением интегралов вида (1), в которых $h(t)$ строго возрастает при $\alpha<t<\beta$, а α и β являются либо обыкновенными точками (то есть стационарными точками нулевого порядка), либо стационарными точками (положительного порядка).

Пусть $0<\lambda$, $\mu\leqslant 1$, $g(t)$ — *функция, имеющая непрерывные производные до* N*-го порядка включительно на интервале* $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $h(t)$ — *дифференцируемая функция, причем*

$$h'(t)=(t-\alpha)^{\rho-1}(\beta-t)^{\sigma-1}h_1(t), \tag{3}$$

где ρ, $\sigma\geqslant 1$, *и* $h_1(t)$ — *положительная функция на интервале* $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, *имеющая непрерывные производные до* N*-го порядка включительно. Тогда*

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,e^{ixh(t)}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\,dt=B(x)-A(x), \tag{4}$$

где

$$A(x) \sim A_N(x) \text{ и } B(x) \sim B_N(x) \textit{ до } N\textit{-го члена при } x \to \infty, \tag{5}$$

а $A_N(x)$ и $B_N(x)$ даются указанными ниже формулами (17) и (20).

Введем сокращенное обозначение

$$g_1(t) = g(t)(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}. \tag{6}$$

Для доказательства теоремы вновь используем *нейтрализатор* $\nu(t)$, который является бесконечно дифференцируемой функцией на интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, такой, что при некотором η, $0 < \eta < (\beta-\alpha)/2$, имеем $\nu(t) = 1$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \alpha + \eta$ и $\nu(t) = 0$ при $\beta - \eta \leqslant t \leqslant \beta$. Положим

$$-A(x) = \int_{\alpha}^{\beta-\eta} \nu(t)\, g_1(t)\, e^{ixh(t)}\, dt, \tag{7}$$

$$B(x) = \int_{\alpha+\eta}^{\beta} [1-\nu(t)]\, g_1(t)\, e^{ixh(t)}\, dt. \tag{8}$$

Чтобы получить асимптотическое разложение интеграла $A(x)$, введем новую переменную интегрирования u, положив

$$u^{\rho} = h(t) - h(\alpha), \quad u_1^{\rho} = h(\beta-\eta) - h(\alpha). \tag{9}$$

Из равенства (3) имеем

$$u^{\rho} = h(t) - h(\alpha) = \int_{\alpha}^{t} h'(s)\, ds =$$

$$= (t-\alpha)^{\rho} \int_0^1 y^{\rho-1} [\beta - \alpha - (t-\alpha)y]^{\sigma-1} h_1[\alpha + (t-\alpha)y]\, dy,$$

где $s = \alpha + (t-\alpha)y$. Последний интеграл является положительной возрастающей функцией от t, имеющей непрерывные производные до $N+1$-го порядка включительно. Поэтому равенство (9) задает отображение интервала $\alpha \leqslant t \leqslant \beta - \eta$ на интервал $0 \leqslant u \leqslant u_1$, имеющее непрерывные производные до $N+1$-го порядка включительно; следовательно, обратное отображение имеет непрерывные производные тех же порядков.

Положим теперь $\nu_1(u) = \nu(t)$ и

$$k(u) = g_1(t)\, u^{1-\lambda} \frac{dt}{du}, \tag{10}$$

где $g_1(t)$ дается формулой (6), а $k(u)$ имеет непрерывные производные до N-го порядка включительно на интервале $0 \leqslant u \leqslant u_1$. Тогда интеграл

$$A(x) = -e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \nu_1(u)\, k(u)\, u^{\lambda-1} \exp(ixu^\rho)\, du$$

можно проинтегрировать по частям N раз, выбрав в качестве дифференцируемой части подынтегрального выражения $\nu_1 k$, а в качестве интегрируемой — все остальные сомножители подынтегрального выражения. Положим

$$\varphi_{-n-1}(u) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_u^\infty (z-u)^n z^{\lambda-1} \exp(ixz^\rho)\, dz; \tag{11}$$

результат интегрирования по частям можно записать в виде

$$A(x) = A_N(x) + R_N(x),$$

где

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n k^{(n)}(0)\, \varphi_{-n-1}(0)\, e^{ixh(\alpha)} \tag{12}$$

и

$$R_N(x) = (-1)^{N+1} e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \varphi_{-N}(u) \frac{d^N(\nu_1 k)}{du^N}\, du. \tag{13}$$

В интеграле (11) путем интегрирования является луч $\arg(z-u) = \pi/(2\rho)$ в комплексной плоскости. Очевидно, что

$$\varphi_{-n-1}(0) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,\rho} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\rho}\right) \exp\left[\frac{\pi i (n+\lambda)}{2\rho}\right] x^{-(n+\lambda)/\rho}. \tag{14}$$

Чтобы оценить $\varphi_{-n-1}(u)$ при $u > 0$, заметим, что $|z|^{\lambda-1} \leqslant u^{\lambda-1}$ и

$$ixz^\rho + x|z-u|^\rho = i\rho x \int_0^u \left(\xi + |z-u| \exp\frac{\pi i}{2\rho}\right)^{\rho-1} d\xi.$$

Так как вещественная часть последнего выражения отрицательна, то

$$|\exp(ixz^\rho)| \leqslant \exp(-x|z-u|^\rho)$$

и, следовательно,

$$|\varphi_{-n-1}(u)| \leqslant \frac{u^{\lambda-1}}{n!} \int_{u}^{\infty} |z-u|^{n} \exp(-x|z-u|^{\rho})\, d|z-u| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\rho}\right) u^{\lambda-1} x^{-(n+1)/\rho}. \qquad (15)$$

С другой стороны, применяя метод перевала к интегралу (11), мы получаем, что при больших значениях xu^{ρ}

$$\varphi_{n-1}(u) = u^{n+\lambda}\, O[(xu^{\rho})^{-n-1}]. \qquad (16)$$

Подставляя (14) и (15) в (12) и (13), имеем

$$A_n(x) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{k^{(m)}(0)}{n!\,\rho} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\rho}\right) \exp\left[\frac{\pi i (n+\lambda)}{2\rho}\right] x^{-(n+\lambda)/\rho} e^{ixh(\alpha)}, \qquad (17)$$

$$|R_N(x)| \leqslant \frac{1}{(N-1)!}\Gamma\left(\frac{N}{\rho}\right) x^{-N/\rho} \int_0^{u_1} u^{\lambda-1} \left|\frac{d^N(v_1 k)}{du^N}\right| du.$$

Это показывает, что $A \sim A_N$ до N-го члена, если $\lambda < 1$. Если $\lambda = 1$ и $\rho = 1$, то тот же самый результат вытекает из п. 2.8. Пусть теперь $\lambda = 1$ и $\rho > 1$; выберем δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(N-1)!}\Gamma\left(\frac{N}{\rho}\right) \int_0^{\delta} u^{\lambda-1} \left|\frac{d^N(v_1 k)}{du^N}\right| du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Так как из (16) вытекает, что $\varphi_{-N}(u) = O(x^{-N})$ равномерно по u, когда $u \geqslant \delta$, то при достаточно больших x

$$x^{N/\rho} \int_{\delta}^{u_1} |\varphi_{-N}(u)| \left|\frac{d^N(v_1 k)}{du^N}\right| du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Таким образом, и в этом случае $R_N = o(x^{-N/\rho})$. Тем самым доказан результат, касающийся $A(x)$.

Точно так же доказывается утверждение о $B(x)$. Введем в формуле (8) новое переменное интегрирования, положив

$$v^{\sigma} = h(\beta) - h(t). \qquad (18)$$

Пусть

$$l(v) = g_1(t)\, v^{1-\mu} \frac{dt}{dv}, \tag{19}$$

где $g_1(t)$ дается формулой (6). В повторных интегралах от $v^{\mu-1}\exp(-ixv^{\sigma})$, возникающих при интегрировании по частям, мы интегрируем вдоль луча $\arg(z-v) = -\pi i/(2\sigma)$. Точно так же, как и для функции A, мы получаем, что $B \sim B_N$ до N-го члена, где

$$B_N(x) = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{l^{(n)}(0)}{n!\,\sigma}\, \Gamma\left[\frac{n+\mu}{\sigma}\right] \exp\left[\frac{-\pi i\,(n+\mu)}{2\sigma}\right] x^{-(n+\mu)/\sigma} e^{ixh(\beta)}. \tag{20}$$

В заключение этого пункта применим общий результат к функции

$$f(x) = \int_0^1 \exp(ixt^3)\, dt.$$

Здесь $\lambda = \mu = 1$, $\rho = 3$, $\sigma = 1$, $u = t$, $k(u) = 1$, и, в силу выражения (17),

$$A_N(x) = 1/3\, \Gamma(1/3)\, e^{\pi i/6} x^{-1/3}.$$

Далее, $v = 1 - t^3$, $t = (1-v)^{1/3}$,

$$l(v) = \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{3}(1-v)^{-2/3}$$

и

$$B_N(x) = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(-1/3)} (ix)^{-n-1} e^{ix},$$

а потому

$$f(x) \sim \Gamma(4/3)\, e^{\pi i/6} x^{-1/3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(-1/3)} (ix)^{-n-1} e^{ix}, \quad x \to \infty.$$

Это разложение было получено в п. 2.7 с помощью метода перевала. Заметим, что в п. 2.7 x могло принимать комплексные значения, в то время как в нашем случае $x \to \infty$, пробегая положительные значения.

ЛИТЕРАТУРА

Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

Bijl Jan, Toepassingen van der methode der stationnaire phase (Thesis). Amsterdam, 1937.

Burkhardt Heintich, München. Akad. S. Ber. I—II, 1914.

Copson E. T., The asymptotic expansion of a function defined by a definite integral or a contour integral. Admiralty Computing Service, London, 1946.

van der Corput J. G., Compositio Math. I, 15—38, 1943.

van der Corput J. G., Compositio Math. 3, 328—372, 1936.

van der Corput J. G., Proc. Amst. Akad. Wet. 51—650—658, 1948.

van der Corput J. G. and Franklin Joel, Proc. Amsterdam. Akad. A. 54, 213—219, 1951.

Doetsch Gustav, Handbuch der Laplace—Transformation, Birkhäuser, Basel, 1950.

Erdelyi Arthur, Proc. Edinburg Math. Soc. (2) 8, 20—24, 1947.

Fulks W. B., Proc. Amer. Math. Soc. 2, 613—622, 1951.

Hsu L. C., Amer. J. Math. 70, 698—708, 1948a.

Hsu L. C., Duke Math. J. 15, 623—632, 1948b.

Hsu L. C., Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A 5, 273—279, 1949a.

Hsu L. C., Acad. Sinica Science Record 2, 339—345, 1949b.

Hsu L. C., Chung Kuo K'o Hsueh (Chinese Science) 2, 149—155, 1951a.

Hsu L. C., Bull. Calcutta Math. Soc. 43, 109—112, 1951b.

Hsu L. C., Amer. J. Math. 73, 625—634, 1951c.

Levi Beppo, Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral 6, 341—351, 1946.

Meijer C. S., Math. Ann. 108, 321—359, 1933a.

Meijer C. S., Asymptotische Entwickelungen Besselscher, Hankelscher und verwandter Funktionen, Groningen (Thesis), 1933b.

Perron Oskar, München, Akad. S. Ber. 191—220, 1917.

Rooney P. G., Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, 47, 29—34, 1953.

Thomsen D. L. Jr., 1954, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 526—532, 1954.

Watson G. N., Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 49—55, 1920.

Widder D. V., The Laplace transform. Princeton, 1941.

ГЛАВА III

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы дадим краткое введение в асимптотическую теорию обыкновенных однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Аналогичные теории существуют для уравнений любого (конечного) порядка и для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Относительно этих более общих теорий см. Айнс (1939, стр. 227 и далее, стр. 645 и далее, стр. 653 и далее, стр. 685 и далее), Камке (1951, стр. 36 и далее, стр. 104 и далее, стр. 131 и далее, стр. 160 и далее), Вазов (1953), литературу, указанную в этих книгах, и литературу, приведенную в конце этой главы. Асимптотические разложения встречаются также в связи с нелинейными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных.

Мы изучим асимптотическое поведение решений уравнения

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

при $x \longrightarrow x_0$. Здесь x либо вещественное переменное, пробегающее некоторый интервал (для которого x_0 обычно является одним из концов), либо комплексное переменное, изменяющееся в некоторой области (для которой x_0 обычно является граничной точкой). В этой главе мы будем считать, что $x_0 = \infty$; очевидно, что это не приводит к потере общности.

Предполагается, что читатель знаком с основными теоремами существования для линейных дифференциальных уравнений как в вещественной, так и в комплексной области, а также, что ему известны главные свойства решений этих уравнений.

3.1. Классификация особых точек

В этом пункте мы изучим дифференциальные уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

где x — комплексное переменное, пробегающее область R, задаваемую неравенствами $\tau < |x| < \infty$, а $p(x)$ и $q(x)$ — однозначные аналитические функции в R (которые могут иметь особенности при $x = \infty$). Дадим краткий обзор хорошо известной классификации изолированных особых точек уравнения (1) (см., например, Уиттекер и Ватсон, 1933, глава X). Заметим, что в нашем случае особой точкой является $x = \infty$.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (1), образующих фундаментальную систему; если аналитически продолжить эти функции вдоль некоторой кривой в R, которая начинается и кончается в точке x и обходит в отрицательном направлении точку $x = 0$, то мы получим две новые функции, которые можно обозначить через $y_j(xe^{-2\pi i})$, $j = 1, 2$. Эти функции не совпадают с функциями $y_j(x)$, но они также являются решениями уравнения (1), а потому имеют место соотношения вида

$$\begin{aligned} y_1(xe^{-2\pi i}) &= a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x), \\ y_2(xe^{-2\pi i}) &= a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x). \end{aligned} \tag{2}$$

В этих соотношениях

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

— невырожденная матрица с постоянными элементами.

Если заменить y_1, y_2 другой фундаментальной системой, то матрица A заменится матрицей B, причем простое вычисление показывает, что $B = MAM^{-1}$, где M — невырожденная матрица с постоянными элементами. Таким образом, все матрицы, получаемые описанным выше способом, эквивалентны. Поэтому они имеют одни и те же собственные значения и одну и ту же каноническую форму. Поскольку собственные значения и каноническая форма этих матриц не зависят от выбора фундаментальной системы, они характеризуют особенность в точке $x = \infty$ (если эта особенность существует).

Предположим, что собственные значения матрицы A различны и она имеет поэтому диагональную каноническую

форму

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Если y_1, y_2 — фундаментальная система, соответствующая канонической форме матрицы A (каноническая фундаментальная система), то соотношения (2) принимают вид

$$y_j(xe^{-2\pi i}) = \lambda_j y_j(x), \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Положим $\lambda_j = \exp(2\pi i \rho_j)$ и назовем ρ_1, ρ_2 *показателями*, соответствующими точке ∞; каждое из чисел ρ_1, ρ_2 определено с точностью до целого слагаемого. Из равенства (3) следует, что каноническая фундаментальная система имеет вид

$$y_j(x) = x^{-\rho_j} \psi_j(x), \quad j = 1, 2, \tag{4}$$

где ψ_1 и ψ_2 — однозначные аналитические функции от x в R, которые, быть может, имеют особенности при $x = \infty$.

Если собственные значения равны, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \exp(2\pi i \rho)$, то каноническая фундаментальная система имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{-\rho} \psi_1(x), \\ y_2(x) &= c y_1(x) \ln x + x^{-\rho} \psi_2(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где ψ_1 и ψ_2 имеют те же свойства, что и в равенстве (4), а c — постоянное; $c = 0$, если каноническая форма матрицы A диагональна, и $c \neq 0$ в противном случае.

Точка $x = \infty$ называется обыкновенной точкой уравнения (1), если все решения регулярны в окрестности этой точки, то есть могут быть представлены в виде сходящихся степенных рядов

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots;$$

$x = \infty$ называется *регулярной особой точкой* уравнения (1), если эта точка не является обыкновенной, а функции ψ_1 и ψ_2 имеют полюсы при $x = \infty$; в этом случае с помощью соответствующего выбора показателей ρ_1 и ρ_2 функции ψ_1 и ψ_2 могут быть сделаны регулярными на бесконечности; наконец, $x = \infty$ называется *иррегулярной особой точкой* уравнения (1), если по крайней мере одна из двух функций ψ_1, ψ_2 имеет существенно особую точку на бесконечности.

Можно показать (см., например, Уиттекер и Ватсон, 1933, стр. 278), что *достаточным условием для того, чтобы*

$x=\infty$ было обыкновенной точкой, является

$$p(x)=2x^{-1}+O(x^{-2}),\quad q(x)=O(x^{-4}),\quad x\to\infty, \tag{6}$$

а достаточным условием для того, чтобы $x=\infty$ было регулярной особой точкой, является

$$p(x)=O(x^{-1}),\quad q(x)=O(x^{-2}),\quad x\to\infty. \tag{7}$$

В случае иррегулярной особенности p и q могут иметь существенно особые точки при $x=\infty$; если p и q имеют лишь полюсы при $x=\infty$, говорят об *иррегулярных особых точках конечного порядка*; наименьшее целое число k, для которого

$$p(x)=O(x^{k-1}),\quad q(x)=O(x^{2k-2}),\quad x\to\infty, \tag{8}$$

называется *рангом* иррегулярной особой точки. Иногда регулярные особые точки рассматривают как особые точки нулевого ранга.

3.2. Нормальные решения

Если $x=\infty$ является обыкновенной точкой уравнения 3.1(1), то y можно разложить в ряд по степеням x^{-1}. Коэффициенты этого ряда можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений, причем сам ряд сходится в R. Если $x=\infty$ является регулярной особой точкой уравнения 3.1(1), можно положить

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n},\quad c_0\neq 0.$$

Мы получаем при этом квадратное уравнение для ρ, рекуррентные соотношения для c_n (подобные приведенным ниже соотношениям (7)) и ряд для y, который сходится в R. В обоих случаях коэффициенты могут быть легко вычислены, а сходящийся ряд удобно применять для вычисления значений решения при больших x.

Ситуация меняется коренным образом, если $x=\infty$ является иррегулярной особой точкой. Так как в этом случае функции ϕ_1, ϕ_2 имеют существенно особые точки при $x=\infty$, то следует положить

$$y=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}.$$

Мы получаем для c_n бесконечную систему линейных уравнений, которую нельзя решить по рекуррентным формулам, а для ρ получается трансцендентное уравнение, содержащее бесконечный определитель (определитель системы). В этом случае коэффициенты трудно вычислить, а полученный ряд не будет быстро сходиться при больших значениях x.

Томе открыл, что в случае, когда *иррегулярная особая точка имеет конечный ранг*, существуют формальные решения, для которых описанные выше неудобства не имеют места; входящие в эти решения коэффициенты могут быть вычислены по рекуррентным формулам, а ряды достаточно удобны для вычислений при больших значениях x. Решения Томе имеют вид

$$y = \exp[P(x)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}, \quad c_0 \neq 0,$$

где $P(x)$ — многочлен; их называют *нормальными решениями*.

Мы покажем сейчас, как строятся нормальные решения в случае *иррегулярной особой точки первого ранга*. Заметим сначала, что если положить в уравнении 3.1(1)

$$y = z \exp\left(-{}^1/_2 \int p\,dx\right),$$

то для z получится дифференциальное уравнение вида (1), в которое не входит z'. Таким образом, достаточно рассмотреть дифференциальное уравнение

$$y'' + q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

в котором коэффициент $q(x)$ задается сходящимся в R рядом

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n}. \tag{2}$$

Мы будем искать формальное решение этого уравнения, имеющее вид

$$y = e^{\omega x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}, \quad c_0 \neq 0, \tag{3}$$

где ω и ρ — постоянные. Следует отметить, что ρ в равенстве (3), вообще говоря, не является показателем, принадлежащим (в смысле п. 3.1) иррегулярной особой точке $x = \infty$.

При действиях над формальными рядами предполагается, что $q_{-m}=0$, $c_{-m}=0$, $m=1, 2, \ldots$, поэтому суммирование производится от $-\infty$ до $+\infty$, за исключением случаев, когда это оговорено особо.

Подставляя разложения (2) и (3) в уравнение (1), получаем

$$\omega^2 \sum c_n x^{-\rho-n} - 2\omega \sum (\rho+n) c_n x^{-\rho-n-1} + \\ + \sum (\rho+n)(\rho+n+1) c_n x^{-\rho-n-2} + \sum q_n x^{-n} \sum c_n x^{-\rho-n} = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к соотношениям

$$\omega^2 c_n - 2\omega (\rho+n-1) c_{n-1} + (\rho+n-2)(\rho+n-1) c_{n-2} + \\ + \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu c_{n-\nu} = 0, \quad (4)$$

справедливым при всех целых n. Первое нетривиальное соотношение имеет место, если $n=0$. Так как $c_0 \neq 0$, получаем

$$\omega^2 + q_0 = 0. \quad (5)$$

Если в соотношении (4) $n=1$ и ω удовлетворяет равенству (5), то

$$-2\omega\rho + q_1 = 0. \quad (6)$$

Эти два уравнения определяют ω и ρ. Из равенств (4) можно получить также рекуррентные соотношения для коэффициентов. Заменяя в (4) n на $n+1$ и пользуясь равенствами (5) и (6), получаем

$$2\omega n c_n = (\rho+n)(\rho+n-1) c_{n-1} + \\ + \sum_{\nu=2}^{n+1} q_\nu c_{n+1-\nu}, \quad n=1, 2, \ldots \quad (7)$$

Таким образом, нормальные решения существуют либо когда $q_0 \neq 0$, либо когда $q_0 = q_1 = 0$. В первом случае равенство (5) определяет ω, равенство (6) определяет ρ, а равенства (7) определяют коэффициенты (поскольку решения уравнения определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что $c_0 = 1$). Кроме того, $\omega, \rho, c_1, \ldots, c_m$ полностью определяются значениями $q_0, q_1, \ldots, q_{m+1}$ и обратно. В этом случае существуют два нормальных решения, соответствующих двум возможным значениям ω. Во втором случае, когда $x=\infty$ является регулярной особой точкой,

из равенства (5) следует, что $\omega = 0$, равенство (6) обращается в тождество, равенство (7) при $n = 1$ определяет ρ как один из корней квадратного уравнения $\rho(\rho + 1) + q_2 = 0$, а равенства (7) при $n = 2, 3, \ldots$ определяют коэффициенты.

Если $q_0 = 0$ и $q_1 \neq 0$, то уравнения (5) и (6) несовместны, а потому нормального решения не существует. В этом случае можно найти так называемое *поднормальное решение*. Для этого преобразуем заменой переменных

$$\xi = x^{1/2}, \quad \eta(\xi) = \xi^{-1/2} y(x)$$

уравнение (1) в уравнение

$$\eta'' + \left[4\xi^2 q(\xi^2) - \frac{3}{4\xi^2}\right] \eta = 0. \tag{8}$$

Если $q_0 = 0$ и $q_1 \neq 0$, то уравнение (8) имеет иррегулярную особенность первого ранга при $x = \infty$, а потому обладает нормальными решениями. В соответствии с этим при $q_0 = 0$, $q_1 \neq 0$ поднормальным решением уравнения (1) называется решение вида

$$y = \exp(\omega x^{1/2}) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{1/4 - 1/2 n}. \tag{9}$$

Относительно построения нормальных и поднормальных решений в случае особых точек более высокого ранга, а также для дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений, см. Айнс (1939, стр. 653 и далее).

Нормальные и поднормальные решения являются формальными решениями; это означает, что если их подставить в дифференциальное уравнение и оперировать с ними, как со сходящимися рядами, то дифференциальное уравнение будет удовлетворяться. Однако бесконечные ряды, входящие в формальные решения, вообще говоря, расходятся. Тем не менее, эти решения далеко не бесполезны, так как они дают асимптотические разложения решений уравнения (1). Связь формальных решений с асимптотическими разложениями решений была изучена многими авторами, начиная с Пуанкаре; некоторые из этих работ указаны в конце главы. Следует отметить, что наиболее общие результаты получены Штернбергом (1920) для дифференциальных уравнений n-го порядка

любого (конечного) ранга и Тржитцинским (1933) для систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Вообще говоря, можно использовать два метода для доказательства того, что формальные решения являются асимптотическими разложениями решений дифференциального уравнения. Один из них восходит к Пуанкаре и был развит Горном в многочисленных работах, часть из которых указана в конце этой главы. Этот метод состоит в том, что для решений находят интегральные представления типа Лапласа, к которым применяют асимптотические разложения, описанные в п. 2.2. Второй метод, развитый Г. Д. Биркгофом и его учениками, состоит в использовании главных членов или частичных сумм формальных решений для построения дифференциального уравнения, в известном смысле близкого при больших значениях x к заданному уравнению, и дальнейшем сравнении этих уравнений. В обоих методах важную роль играют сингулярные интегральные или интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра.

Мы применим один из вариантов второго метода для исследования дифференциального уравнения (1) при $q_0 \neq 0$. Приводимое ниже доказательство основывается главным образом на работах Гогейзеля (1924) и Трикоми (1953, стр. 47—50). Так как аналитичность функций q и y не используется при построении формальных решений, исследование может быть проведено как в случае вещественного, так и в случае комплексного аргумента.

3.3. Интегральное уравнение и его решение

Рассмотрим сначала случай вещественного переменного, отложив краткое изложение случая комплексного переменного до п. 3.5. Рассмотрим уравнение

$$y'' + q(x)\, y = 0, \quad x \geqslant a > 0, \tag{1}$$

где функция $q(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$

$$q(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n}, \quad x \to \infty, \quad q_0 \neq 0. \tag{2}$$

Мы получаем в этом случае два формальных решения

$$e^{\omega x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}, \quad c_0 \neq 0, \tag{3}$$

где ω, ρ, c_1, c_2, ... удовлетворяют соотношениям 3.2(5), (6), (7). Покажем, что эти формальные решения являются асимптотическими разложениями некоторых решений уравнения (1).

Пусть $\omega = \omega_1 + i\omega_2$; $\rho = \rho_1 + i\rho_2$; выберем $\omega = (-q_0)^{1/2}$ так, чтобы функция $e^{\omega x}x^{-\rho}$ была ограничена при $x \to \infty$. Если q_0 не является положительным вещественным числом, то этого можно достичь, выбирая значение квадратного корня, для которого $\omega_1 < 0$; если $q_0 > 0$ и $\operatorname{Im} q_1 \neq 0$, то можно выбрать такое значение квадратного корня, что $\rho_1 = \operatorname{Re}[q_1/(2\omega)] > 0$; наконец, если $q_0 > 0$ и q_1 — вещественно, можно взять любое из значений квадратного корня. Таким образом, во всех случаях либо $\omega_1 > 0$, либо $\omega_1 = 0$ и $\rho_1 \geqslant 0$. В дальнейшем мы будем считать эти условия выполненными.

Преобразуем уравнение (1) с помощью подстановки

$$y(x) = e^{\omega x}x^{-\rho}z(x). \tag{4}$$

Очевидно, что функция z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z'' + 2\left(\omega - \frac{\rho}{x}\right)z' + \left[\omega^2 - \frac{2\omega\rho}{x} + \frac{\rho(\rho+1)}{x^2} + q(x)\right]z = 0. \tag{5}$$

В этом уравнении значения ω и ρ удовлетворяют равенствам 3.2(5), (6). Положим

$$x^2[q(x) - q_0 - q_1x^{-1}] + \rho(\rho+1) = F(x). \tag{6}$$

Из соотношения (2) вытекает, что функция $F(x)$ ограничена,

$$|F(x)| \leqslant A, \quad x \geqslant a. \tag{7}$$

Перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2\omega x}x^{-2\rho}\frac{dz}{dx}\right) + e^{2\omega x}x^{-2\rho-2}F(x)z(x) = 0.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\frac{dz}{dx} + e^{-2\omega x}x^{2\rho}\int_b^x e^{2\omega t}t^{-2\rho-2}F(t)z(t)\,dt = c_2x^{-2\omega x}x^{2\rho},$$

где c_2 и $b \geqslant a$ — произвольные постоянные. Интегрируя еще

раз, приходим к уравнению

$$z(x)+\int_b^x K(x, t) F(t) z(t) t^{-2} dt = c_1 + c_2 \int_a^x e^{-2\rho t} t^{2\sigma} dt, \quad (8)$$

где

$$K(x, t) = -\int_x^t \exp[2\omega(t-s)] \left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho} ds. \quad (9)$$

Уравнение (8) является интегральным уравнением типа Вольтерра. Любое решение уравнения (5) удовлетворяет при некоторых b, c_1 и c_2 уравнению (8); обратно, любое решение уравнения (8) при любых b, c_1, c_2, имеющее непрерывную производную второго порядка, удовлетворяет уравнению (5). При $b<\infty$ существование таких решений уравнения (8) вытекает из общей теории интегральных уравнений. Если же $b=\infty$, то (8) является сингулярным интегральным уравнением, а потому в этом случае надо доказать существование и дифференцируемость решений.

Для того чтобы доказать, что уравнение (5) имеет решение, которое может быть асимптотически представлено в виде $\sum c_n x^{-n}$, положим в уравнении (8) $b=\infty$, $c_1=1$, $c_2=0$. Уравнение (8) принимает при этом вид

$$z(x)=1+\int_x^\infty K(x, t) F(t) z(t) t^{-2} dt. \quad (10)$$

Это интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений.

Положим для любой функции $\zeta(x)$

$$T\zeta(x)=\int_x^\infty K(x, t) F(t) \zeta(t) t^{-2} dt \quad (11)$$

и определим далее функции $z_0(x)$, $z_{n+1}(x)$, $z(x)$ равенствами

$$z_0(x)=1, \quad z_{n+1}(x)=Tz_n(x), \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad (12)$$

$$z(x)=\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x). \quad (13)$$

Докажем, что функция $z(x)$ существует, удовлетворяет уравнению (10), дифференцируема и удовлетворяет уравнению (5). Доказательство разбивается на несколько шагов.

Ядро $K(x, t)$ ограничено при $t \geqslant x \geqslant x_0$, если $x_0 > a$ и x_0 достаточно велико.

Доказательство. Так как либо $\omega_1 < 0$, либо $\omega_1 = 0$ и $\rho_1 \geqslant 0$, то при достаточно больших значениях s имеем

$$\frac{d}{ds} \ln (e^{-2\omega_1 s} s^{2\rho_1}) = -2\omega_1 + \frac{2\rho_1}{s} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$e^{-2\omega_1 s} s^{2\rho_1}$$

является возрастающей функцией от s. Положим

$$e^{2\omega(t-s)} \left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho} = e^{2\omega_1 (t-s)} \left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho_1} [\varphi_1(s, t) + i\varphi_2(s, t)],$$

где

$$\varphi_1(s, t) + i\varphi_2(s, t) = e^{2i\omega_2 (t-s)} \left(\frac{s}{t}\right)^{2i\rho_2},$$

и применим к интегралу (9) вторую теорему о среднем значении. Мы получим

$$-K(x, t) = \int_x^t e^{2\omega_1 (t-s)} \left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho_1} [\varphi_1(s, t) + i\varphi_2(s, t)]\, ds =$$

$$= e^{2\omega_1 (t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho_1} \left[\int_x^{\xi} \varphi_1(s, t)\, ds + i \int_x^{\eta} \varphi_2(s, t)\, ds\right] +$$

$$+ \int_{\xi}^{t} \varphi_1(s, t)\, ds + i \int_{\eta}^{t} \varphi_2(s, t)\, ds,$$

где $x \leqslant \xi$, $\eta \leqslant t$. Интегралы в правой части этого равенства являются ограниченными функциями от x и t. Кроме того, если $t \geqslant x \geqslant x_0$ и x_0 достаточно велико, то

$$e^{2\omega_1 (t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho_1} \leqslant 1.$$

Поэтому

$$|K(x, t)| \leqslant B, \quad t \geqslant x \geqslant x_0, \tag{14}$$

при некоторых x_0 и B.

Если $|\zeta(t)| \leqslant Ct^{-\lambda}$ при $t \geqslant x_0$, где $\lambda > -1$, то

$$|T\zeta(x)| \leqslant \frac{ABC}{\lambda+1} x^{-\lambda-1}, \quad x \geqslant x_0. \tag{15}$$

В самом деле, из равенств (11), (7) и (14) вытекает

$$|T\zeta(x)| = \left|\int_x^\infty K(x, t) F(t) \zeta(t) t^{-2} dt\right| \leqslant ABC \int_x^\infty t^{-\lambda-2} dt,$$

откуда и следует неравенство (15).

Для функций, определенных равенством (12), справедлива оценка

$$|z_n(x)| \leqslant \frac{(AB)^n}{n!} x^{-n}, \quad x \geqslant x_0. \tag{16}$$

Доказательство проводится по индукции. Оценка (16) справедлива при $n=0$; если она справедлива при некотором n, то из определения z_{n+1} и оценки (15) вытекает ее справедливость для $n+1$.

Ряды (13) равномерно сходятся при $x > x_0$ и функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (10). Кроме того, $z(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка и удовлетворяет уравнению (5). Равномерная сходимость вытекает из оценки (16). Если мы подставим $z = \sum z_n$ в интеграл, стоящий в правой части равенства (10), то, в силу равномерной сходимости, можно выполнить почленное интегрирование. В силу соотношений (11), (12), (13), мы получаем, что функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (10). Далее, интеграл в равенстве (10) является дифференцируемой функцией от x, а потому и функция $z(x)$ дифференцируема. Так как

$$K(x, x) = 0, \quad \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho},$$

то из равенства (10) вытекает

$$z'(x) = \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} F(t) z(t) t^{-2} dt. \tag{17}$$

Этот интеграл также является дифференцируемой функцией от x. Непосредственная подстановка показывает, что функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (5). Если функция z задана формулой (13), то функция

$$y_1(x) = e^{\omega x} x^{-\rho} z(x) \tag{18}$$

удовлетворяет уравнению (1). В случае, когда $q_0 > 0$ и q_1 вещественно, можно взять оба значения $(-q_0)^{1/2}$ для ω и таким образом получить два линейно независимых решения вида (18). Во всех других случаях существует лишь одно решение этого вида, а второе решение записывается в виде

$$y_2(x) = y_1(x) \int_b^x [y_1(t)]^{-2}\, dt, \tag{19}$$

где b — любое число, достаточно большое для того, чтобы при $x \geqslant b$ выполнялось неравенство $y_1(x) \neq 0$. Так как при $x \to \infty$ имеем $z(x) = 1 + O(x^{-1})$, такое b заведомо существует.

Таким образом, в любом случае на интервале $x \geqslant x_0$ существуют два линейно независимых решения уравнения (1). Если $a < x_0$, эти решения можно распространить на интервал $x \geqslant a$. Нам осталось показать, что полученные в п. 3.2 формальные решения совпадают с асимптотическими разложениями полученных в этом пункте решений.

3.4. Асимптотические разложения решений

Заметим сначала, что

$$\int_x^\infty e^{-t} t^{-\nu} dt \sim e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\nu)_m x^{-\nu-m}, \quad \text{когда } x \to \infty, \tag{1}$$

$$\int_b^x e^{t} t^{-\nu} dt \sim e^{x} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu)_m x^{-\nu-m}, \quad \text{когда } x \to \infty, \tag{2}$$

где

$$(\nu)_0 = 1, \ (\nu)_r = \nu(\nu+1) \ldots (\nu+r-1). \tag{3}$$

Оба эти результата вытекают из формулы 2.1(5), если положить в ней $g=t^{-\nu}$, $h_{-m}=(\mp 1)^m \exp(\mp t)$. В частности,

$$\int_x^\infty e^{-t} t^{-\nu} dt = O(e^{-x} x^{-\nu}), \quad x \to \infty, \tag{4}$$

$$\int_b^x e^t t^{-\nu} dt = O(e^x x^{-\nu}), \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Докажем теперь по индукции, что *функции, определенные формулой* 3.3(12), *могут быть разложены в асимптотические степенные ряды вида*

$$z_n(x) \sim \sum_{k=n}^\infty c_{kn} x^{-k}, \quad x \to \infty. \tag{6}$$

Это утверждение тривиально при $n=0$. Если оно верно для некоторого n, то

$$F(t) z_n(t) \sim \sum_{k=n}^\infty a_k t^{-k}, \ t \to \infty.$$

Но

$$z'_{n+1}(x) = \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} F(t) z_n(t) t^{-2} dt.$$

Если ω и ρ — вещественные числа, то, в силу последней теоремы п. 1.4, в интеграл можно подставить асимптотическое разложение функции $F(t) z_n(t)$ и проинтегрировать почленно; при этом получаем

$$z'_{n+1}(x) \sim \sum_{k=n}^\infty a_k \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} t^{-k-2} dt, \ x \to \infty. \tag{7}$$

Если ω или ρ — комплексные числа, то формула (7) может быть доказана путем подстановки в интеграл асимптотического разложения функции $F(t) z_n(t)$, состоящего из конечного числа членов и остаточного члена, с последующей оценкой остаточного члена в формуле (7) по соотношению (4). Во всяком случае, каждый интеграл в равенстве (7) может быть разложен в асимптотический степенной ряд, который получается из формулы (1) и начинается с члена, содержа-

щего x^{-k-2}. В силу третьей теоремы п. 1.4 можно подставить эти разложения в равенство (7). В самом деле, $\mu(n)=n$, равномерность асимптотических разложений тривиальна, а ряды 1.4 (5) состоят из конечного числа членов, так что вопрос об их сходимости не возникает. После указанной подстановки мы получаем путем перестановки членов, что

$$z'_{n+1}(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} b_k x^{-k-2}. \tag{8}$$

Почленное интегрирование разложения (8) приводит к искомому асимптотическому разложению функции z_{n+1}. Наше утверждение доказано.

В силу второй теоремы п. 1.4, можно подставить разложения (6) в формулу 3.3 (13). В самом деле, $z_n = O(x^{-n})$, равномерность разложений тривиальна, а ряды 1.4 (2) конечны, так что вопрос об их сходимости не возникает. Таким образом, *функция $z(x)$ может быть разложена в асимптотический степенной ряд вида*

$$z(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}, \quad x \to \infty. \tag{9}$$

Нам осталось доказать, что *входящие в это разложение коэффициенты c_n удовлетворяют соотношениям* 3.2 (7). Для этого заметим, что из равенства 3.3 (17) и соответствующего соотношения для z'' вытекает возможность разложения в асимптотические степенные ряды функций z' и z''. В силу результатов п. 1.6, отсюда следует, что разложение (9) может быть дважды почленно продифференцировано. Получающиеся асимптотические ряды должны формально удовлетворять уравнению 3.3 (5), а это и приводит к соотношению 3.2 (7) для коэффициентов. Кроме того, $c_0 = 1$.

Мы доказали, таким образом, что функция $y_1(x)$, задаваемая формулой 3.3 (18), может быть асимптотически представлена одним из формальных решений; нам осталось показать, что функция $y_2(x)$, задаваемая формулой 3.3 (19), представима с помощью другого формального решения. Для этого положим

$$y_2(x) = e^{-\omega x} x^{\rho} z_2(x). \tag{10}$$

Из равенств 3.3 (18) и (19) вытекает

$$z_2(x) = z(x)\int_b^x e^{2\omega(x-t)}\left(\frac{x}{t}\right)^{-2\rho}[z(t)]^{-2}dt. \tag{11}$$

В силу выбора b, функция $z(t)$ ограничена вне некоторой окрестности нуля; кроме того, как было показано выше, эта функция обладает асимптотическим разложением (9) при $t \to \infty$, где $c_0 = 1$. Поэтому при некоторых a_n

$$[z(t)]^{-2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^{-n} + O(t^{-N}), \quad t \geqslant b,$$

и

$$\frac{z_2(x)}{z(x)} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_b^x e^{2\omega(x-t)}\left(\frac{x}{t}\right)^{-2\rho} t^{-n}dt + \\ + \int_b^x e^{2\omega(x-t)}\left(\frac{x}{t}\right)^{-2\rho} O(t^{-N})\,dt.$$

Интегралы, стоящие под знаком суммы, можно асимптотически разложить по формуле (2), а последний интеграл, в силу оценки (5), есть $O(x^{-N})$. Поскольку N является произвольным натуральным числом, $z_2(x)/z(x)$ обладает разложением в асимптотический степенной ряд. Но тогда и *функция $z_2(x)$ может быть разложена в асимптотический степенной ряд*

$$z_2(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{-n}, \quad x \to \infty. \tag{12}$$

Точно так же, как и для функции z_1, можно доказать, что *входящие в это разложение коэффициенты удовлетворяют рекуррентным соотношениям*, которые отличаются от соотношений 3.2 (7) лишь тем, что ω и ρ заменены на $-\omega$ и $-\rho$. Таким образом, и решение 3.3 (19) асимптотически представимо одним из формальных решений.

Если ω и ρ являются чисто мнимыми числами, то существуют два фундаментальных решения, представимых в виде 3.3 (18); они определены однозначно с точностью до постоянного множителя; оба эти решения ограничены и ни одно из них не стремится к нулю, когда $x \to \infty$. Во всех других случаях одно из фундаментальных решений, а именно 3.3 (18),

стремится к нулю, когда $x \to \infty$; это решение определено однозначно с точностью до постоянного множителя; второе решение 3.3 (19) не является ограниченным, когда $x \to \infty$. Поскольку это второе решение зависит от b, оно не является однозначно определенным. В самом деле,

$$y_1 y_1(x) + y_2 y_2(x) \sim y_2 y_2(x), \quad x \to \infty, \quad y_2 \neq 0.$$

3.5. Комплексное переменное. Явление Стокса

Результаты предыдущих пунктов могут быть распространены на случай комплексного x, изменяющегося в области S, задаваемой неравенствами

$$|x| \geqslant a, \quad \alpha \leqslant \arg x \leqslant \beta. \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что $q(x)$ является аналитической функцией в S, имеющей равномерно по $\arg x$ асимптотическое разложение 3.3 (2), когда $x \to \infty$ в S. Мы имеем тогда два формальных решения 3.3 (3), где ω удовлетворяет уравнению 3.2 (5).

Линия $\operatorname{Re}[x(-q_0)^{1/2}] = 0$ называется *критической линией* или *линией Стокса*. Если $x \to \infty$ вдоль одного из лучей критической линии, экспоненциальный множитель в обоих формальных решениях остается ограниченным, равно как и обратная ему величина. Если $x \to \infty$ вдоль любого луча, то главный член одного из формальных решений экспоненциально возрастает.

Предположим сначала, что критическая линия не пересекает область S. Очевидно, в этом случае $\beta - \alpha < \pi$, а потому существует решение ω уравнения 3.2 (5), такое, что $\operatorname{Re} \omega x < 0$ при всех x в S. Если x изменяется вдоль любого луча $\arg x = \mathrm{const}$ в S, то результаты пп. 3.3 и 3.4 сохраняют силу. Доказательство этих результатов для области S протекает следующим образом. В интегральном уравнении 3.3 (10) следует вести интегрирование вдоль луча $\arg x = \arg t$. Тогда ограниченность ядра будет иметь место для любого x в S равномерно по x, если $\alpha \leqslant \arg x \leqslant \beta$. Интегральное уравнение решается так же, как и выше, причем каждая функция $z_n(x)$ может быть выбрана так, чтобы она была анали-

тической в S; при этом функция $z(x)$ также аналитична в S как равномерный предел аналитических функций. В равенстве 3.3 (8) b выбирается так, чтобы $y_1(x) \neq 0$, когда $|x| \geqslant b$, $\alpha \leqslant \arg x \leqslant \beta$. Отсюда вытекает существование двух решений y_1 и y_2 в S, асимптотические разложения которых отличаются лишь постоянными множителями от формальных решений 3.3 (3). Асимптотические разложения имеют место, равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $\alpha \leqslant \arg x \leqslant \beta$. Любое решение дифференциального уравнения является линейной комбинацией решений y_1 и y_2; асимптотические разложения этих решений получаются из асимптотических разложений y_1 и y_2.

Рассмотрим теперь случай, когда критическая линия пересекает область S. Область S распадается тогда на конечное число областей S_k, $k=1, 2, \ldots, K$, отделенных друг от друга лучами критической линии. В каждой из областей S_k можно выбрать такое значение ω_k для ω, что $\operatorname{Re} \omega_k x < 0$ для всех x в S_k; таким образом, в каждом S_k существует фундаментальная система решений y_{1k}, y_{2k}, асимптотически представимых формальными решениями. Относительно полного исследования этих фундаментальных систем см. Гогейзель (1924). Оказывается, что фундаментальная система решений, соответствующая лучу критической линии, может быть также сделана фундаментальной системой в каждой из двух областей, разделенных этим лучом. Каждое из решений этой фундаментальной системы доминирует (экспоненциально возрастает) в одной из двух областей и рецессивно (экспоненциально убывает) в другой области.

Рассмотрим решение $y(x)$ дифференциального уравнения в S. В каждой из областей S_k y является линейной комбинацией двух фундаментальных решений, соответствующих этой области. Поэтому в каждой из областей y может быть асимптотически представлено как линейная комбинация двух формальных решений, однако коэффициенты этих линейных комбинаций могут меняться от области к области. Это обстоятельство было открыто Стоксом и называется *явлением Стокса*. Области S_k иногда называют *областями (секторами) Стокса*, а критические лучи — *лучами Стокса.*

Относительно определения коэффициентов, входящих в выражение $y(x)$, как линейной комбинации формальных решений, см. Тьюриттин (1950).

3.6. Бесселевы функции нулевого порядка

Проиллюстрируем результаты последних пунктов на примере дифференциального уравнения

$$z'' + x^{-1}z' + z = 0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют функции Бесселя нулевого порядка. Замена переменной

$$z = x^{-1/2}y \tag{2}$$

преобразует уравнение (1) к стандартной форме

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)y = 0. \tag{3}$$

Это уравнение имеет вид 3.3(1), причем в неравенствах 3.5(1) мы можем положить $a = 0$, а α и β выбрать произвольно.

Формальное решение этого уравнения получается так, как описано в п. 3.2; уравнения (5), (6), (7) этого пункта принимают в нашем случае вид

$$\omega^2 + 1 = 0, \qquad \rho = 0, \qquad 2\omega n c_n = (n - 1/2)^2 c_{n-1}.$$

Если ввести сокращенное обозначение

$$\alpha_n = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu - 1/2)^2}{2} = \frac{[\Gamma(n + 1/2)]^2}{2^n n! \pi} \tag{4}$$

и выбрать соответствующим образом c_0, то формальные решения уравнения (1) запишутся так:

$$S_1(x) = (2/\pi)^{1/2} e^{ix - i\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (-i)^n x^{-n-1/2}, \tag{5}$$

$$S_2(x) = (2/\pi)^{1/2} e^{-ix + i\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n i^n x^{-n-1/2}. \tag{6}$$

Между формальными рядами (5) и (6) имеют место тождественные соотношения

$$\begin{aligned} &S_1(xe^{\pi i}) = -S_2(x), \quad &S_1(xe^{-\pi i}) = S_2(x),\\ &S_2(xe^{\pi i}) = S_1(x), \quad &S_2(xe^{-\pi i}) = -S_1(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $\omega = \pm i$, то критической линией является вещественная ось. В соответствии с теорией, изложенной в предыдущем пункте, каждое решение уравнения (1) может быть асимптотически представлено в виде линейных комбинаций

решений S_1 и S_2 в любом секторе, лежащем целиком в верхней (или в нижней) полуплоскости. При переходе через вещественную ось коэффициенты этих линейных комбинаций могут изменяться. Мы увидим сейчас, что такое изменение действительно имеет место.

Непосредственная подстановка показывает, что одним из решений уравнения (1) является бесселева функция первого рода нулевого порядка

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}, \tag{8}$$

которая является четной целой функцией от x. С помощью разложения показательной функции в степенной ряд и почленного интегрирования легко убедиться, что для функции $J_0(x)$ справедливо интегральное представление Пуассона

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{ixu}(1-u^2)^{-1/2}\,du. \tag{9}$$

Предположим, что $\operatorname{Re} x>0$. Тогда e^{ixu} экспоненциально убывает, когда $\operatorname{Im} u\longrightarrow\infty$, а потому интеграл (9) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1}=-\int_{1}^{1+i\infty}+\int_{-1}^{-1+i\infty}.$$

В первом интеграле положим

$$u=1+it,\quad 1-u=te^{-i\pi/2},\quad 1+u=2+it,$$

а во втором положим

$$u=-1+it,\quad 1-u=2-it,\quad 1+u=te^{i\pi/2}.$$

Мы получаем при этом две функции, отличающиеся лишь постоянными множителями от функций

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(x)&=\frac{2}{\pi}e^{ix-i\pi/4}\int_0^{\infty}e^{-xt}t^{-1/2}(2+it)^{-1/2}\,dt,\\ H_0^{(2)}(x)&=\frac{2}{\pi}e^{-ix+i\pi/4}\int_0^{\infty}e^{-xt}t^{-1/2}(2-it)^{-1/2}\,dt, \end{aligned} \tag{10}$$

Функции, определяемые равенствами (10), называются *бесселевыми функциями третьего рода (или функциями Ганкеля) нулевого порядка.* Эти функции определяются равенствами (10) при $\operatorname{Re} x > 0$. Однако область их определения можно распространить до $-\pi < \arg x < 2\pi$ в случае $H_0^{(1)}$ и до $-2\pi < \arg x < \pi$ в случае $H_0^{(2)}$. Для этого надо повернуть путь интегрирования так, как это было описано в п. 2.2.

Можно показать, что $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ также являются решениями уравнения (1). Очевидно, что

$$J_0(x) = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(x) + \frac{1}{2} H_0^{(2)}(x), \tag{11}$$

причем, как показывает более тщательное исследование, обе функции $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ имеют логарифмические особенности при $x = 0$. Изучение этих особенностей дает возможность определить функции Ганкеля для всех значений $\arg x$.

Интегральные представления функций Ганкеля являются интегралами Лапласа, а потому их асимптотические разложения при больших значениях x могут быть получены с помощью последней теоремы п. 2.2. Мы получаем при этом, что

$$H_0^{(1)}(x) \sim S_1(x) \tag{12}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg x < 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

$$H_0^{(2)}(x) \sim S_2(x) \tag{13}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $-2\pi + \varepsilon \leqslant \arg x \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Из равенства (11) вытекает

$$2J_0(x) \sim S_1(x) + S_2(x) \tag{14}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg x \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

В последнем равенстве символ $\sim$ применен в несколько необычном смысле, поскольку в правой части равенства мы имеем не одно асимптотическое разложение, а сумму двух таких разложений. Оправданием такого использования знака $\sim$

является то обстоятельство, что на вещественной оси оба разложения имеют один и тот же порядок, и сумма (14) может быть записана в виде одного разложения (которое уже не является асимптотическим степенным рядом), в то время как в верхней (соответственно в нижней) полуплоскости слагаемое $S_1(x)$ (соответственно $S_2(x)$) рецессивно и может быть опущено.

Мы получили, таким образом, асимптотическое разложение функции $J_0(x)$, справедливое во всей плоскости, за исключением узкого сектора, окружающего отрицательную полуось. Чтобы получить асимптотическое разложение, справедливое и в секторах, содержащих эту полуось, заметим, что из равенств (8) и (14) вытекает соотношение

$$2J_0(x) = 2J_0(xe^{\pi i}) \sim S_1(xe^{\pi i}) + S_2(xe^{\pi i})$$

при $x \to \infty$ и $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg(xe^{\pi i}) \leqslant \pi - \varepsilon$. Поэтому, в силу равенства (7),

$$2J_0(x) \sim S_1(x) - S_2(x) \tag{15}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $-2\pi + \varepsilon \leqslant \arg x \leqslant -\varepsilon$.

Аналогично, $J_0(x) = J_0(xe^{-\pi i})$ и

$$2J_0(x) \sim -S_1(x) + S_2(x) \tag{16}$$

равномерно по $\arg x$, когда $x \to \infty$, $\varepsilon \leqslant \arg x \leqslant 2\pi - \varepsilon$.

Сравнение равенств (14), (15) и (16) показывает, что в нашем случае имеет место явление Стокса. Лучи, принадлежащие узким секторам, являются лучами Стокса. На первый взгляд может показаться странным, что секторы, в которых справедливы различные асимптотические разложения, перекрываются друг с другом, однако в этом нет никакого противоречия. Например, области, в которых справедливы разложения (14) и (15), имеют общую часть

$$-\pi + \varepsilon \leqslant \arg x \leqslant -\varepsilon.$$

В этой общей части слагаемое $S_2(x)$ рецессивно, а потому правые части равенств (14) и (15) асимптотически равны. Таким образом, коэффициенты при формальных рядах скачкообразно меняются в секторах, где эти ряды доминируются другими рядами.

ЛИТЕРАТУРА

Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1951

Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, Л. — М., 1933.

Hoheisel G. K. H., J. Reine Angew. Math. 153, 228—248, 1924.

Horn Jakob, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 24, 309—329, 1915.

Horn Jakob, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 25, 74—83, 301—325, 1916.

Horn Jakob, Math. Z. 3, 265—313, 1919.

Horn Jakob, Math. Z. 8, 100—114, 1920.

Horn Jakob, Math. Z. 21, 85—95, 1924.

Poincaré Henri, Acta Math. 8, 295—344, 1886.

Sternberg Wolfgang, Math. Ann. 81, 119—186, 1920.

Tricomi F. C., Equazioni differenziali, Second edition, Torino, 1953.

Trjitzinsky W. J., Acta Math. 62, 167—226, 1933.

Turrittin H. L., Trans. Amer. Math. Soc. 68, 304—329, 1950.

Wasow W. R., Introduction to the asymptotic theory of ordinary linear differential equations. Working paper National Bureau of Standards, 1953.

ГЛАВА IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

В этой главе будет кратко изложена асимптотическая теория обыкновенных однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр. Относительно этой теории, а также ее обобщений на уравнения высших порядков и на системы дифференциальных уравнений первого порядка, см. Айнс (1939, стр. 365 и далее), Камке (1951, стр. 74 и далее, стр. 111 и далее, стр. 163 и далее, стр. 209 и далее), Вазов (1953), литературу, указанную в этих работах, а также литературу, указанную в конце этой главы.

Как и в п. 3.2, дифференциальные уравнения можно преобразовать к стандартному виду

$$y'' + q(x, \lambda)\, y = 0,$$

где x — вещественное или комплексное переменное, а λ — вещественный или комплексный параметр. Мы изучим поведение решений этого дифференциального уравнения при $\lambda \to \lambda_0$, причем, не теряя общности, можно считать, что $\lambda_0 = \infty$.

Предполагается, что читатель знаком с основными теоремами о зависимости решений дифференциального уравнения от входящих в это уравнение параметров, см., например, И. Г. Петровский (1939, стр. 54).

4.1. Проблема Лиувилля

В ходе своих классических исследований по проблеме Штурма — Лиувилля Лиувилль изучил поведение решений дифференциального уравнения

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r(x)]\, y = 0 \qquad (1)$$

при $\lambda \to \infty$. Здесь x — вещественное переменное, $a \leqslant x \leqslant b$, $p(x)$ — положительная функция, имеющая непрерывную вторую производную, а $r(x)$ — функция, непрерывная на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Метод Лиувилля может быть описан следующим образом.

Введем новые переменные ξ и η с помощью подстановки

$$\xi = \int [p(x)]^{1/2}\, dx, \quad \eta = [p(x)]^{1/4} y. \tag{2}$$

Эта подстановка преобразует интервал $a \leqslant x \leqslant b$ в интервал $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$, а дифференциальное уравнение (1) — в уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \lambda^2\eta = \rho(\xi)\,\eta, \tag{3}$$

где

$$\rho(\xi) = \frac{1}{4}\frac{p''}{p^2} - \frac{5}{16}\frac{p'^2}{p^3} - \frac{r}{p} \tag{4}$$

является непрерывной функцией от ξ, $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ ($p' = dp/dx$ и т. д.).

Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 3.3, показывают, что решения уравнения (3) удовлетворяют интегральному уравнению Вольтерра

$$\eta(\xi) = c_1 \cos\lambda\xi + c_2 \sin\lambda\xi + \lambda^{-1}\int_{\gamma}^{\xi} \sin\lambda(\xi - t)\,\rho(t)\,\eta(t)\,dt, \tag{5}$$

где $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, а c_1, c_2 — произвольные постоянные. Функции $\eta(\xi)$ и $c_1\cos\lambda\xi + c_2\sin\lambda\xi$, равно как и их производные, имеют при $\xi = \gamma$ одинаковые значения.

Применяя метод последовательных приближений, можно получить решение интегрального уравнения (5) в виде

$$\eta(\xi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\xi, \lambda), \tag{6}$$

где

$$\eta_0(\xi, \lambda) = c_1\cos\lambda\xi + c_2\sin\lambda\xi,$$

$$\eta_{n+1}(\xi, \lambda) = \lambda^{-1}\int_{\gamma}^{\xi} \sin\lambda(\xi - t)\,\rho(t)\,\eta_n(t, \lambda)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Если $|\rho(\xi)| \leqslant A$, то легко доказать по индукции, что

$$|\eta_n(\xi, \lambda)| \leqslant \frac{|c_1| + |c_2|}{n!} \frac{A^n |\xi - \gamma|^n}{\lambda^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В случае, когда интервал (α, β) конечен, отсюда вытекает, что ряд (6) равномерно сходится при $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$, $\lambda \geqslant \lambda_1 > 0$, а также, что он является асимптотическим разложением функции $\eta(\xi, \lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Функции η_n довольно трудно вычислить. Поэтому при больших значениях λ используют другие приближения, получаемые из формальных решений (которые, вообще говоря, расходятся). Для этого существуют два метода. Применяют либо формальные разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \lambda^{-n} \cos \lambda\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x) \lambda^{-n} \sin \lambda\xi$$

для $y(x, \lambda)$, либо формальные разложения

$$i\lambda\xi + \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \lambda^{-n}$$

для $\ln y(x, \lambda)$. Во втором случае y является решением, не имеющим нулей. В обоих случаях приближения для y строятся с помощью частичных сумм формальных разложений; эти приближения сравниваются с y с помощью интегрального уравнения. Если частичные суммы состоят из одного члена, то оба метода сводятся к процессу Лиувилля.

4.2. Формальные решения

Вместо уравнения 4.1(1) мы будем рассматривать несколько более общее дифференциальное уравнение

$$y'' + q(x, \lambda) y = 0. \tag{1}$$

Если $q(x, \lambda)$ является формальным степенным рядом, расположенным по степеням λ^{-1}, коэффициенты которого зависят от x, то два линейно независимых решения уравнения (1) также могут быть представлены в виде формальных степенных рядов по λ^{-1}. Если же формальное разложение функции q по степеням λ содержит положительные степени λ, то формальные разложения y имеют вид ряда Лорана. Тем не менее мы увидим, что в случае, когда $q(x, \lambda)$ является

функцией от λ, имеющей лишь полюс при $\lambda=\infty$, можно построить формальные решения, аналогичные нормальным и поднормальным решениям из п. 3.2.

Предположим, что в уравнении (1) $q(x, \lambda)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\lambda^{2k-n}, \tag{2}$$

где функции $q_n(x)$ независимы от λ, а k — положительное целое число. Предположим также, что функция $q_0(x)$ не обращается в нуль в интервале или односвязной области комплексной плоскости, где изменяется переменное x.

В соответствии с двумя методами, указанными в конце п. 4.1, существуют два типа формальных решений уравнения (1). Первый из них имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^{-n}\exp\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\beta_\nu(x)\lambda^{k-\nu}\right]. \tag{3}$$

Подставим разложение (3) в уравнение (1); при этом условимся считать, что $q_n=0$, $\alpha_n=0$ при $n=-1, -2, -3, \ldots$, а $\beta_\nu=0$ при $\nu=-1, -2, \ldots$ и при $\nu=k, k+1, \ldots$ Тогда суммирования можно считать распространенными на все целые числа и потому

$$\left[\sum \beta_\nu''\lambda^{k-\nu}+\left(\sum \beta_\nu'\lambda^{k-\nu}\right)^2\right]\sum \alpha_n\lambda^{-n}+$$
$$+2\sum \beta_\nu'\lambda^{k-\nu}\sum \alpha_n'\lambda^{-n}+\sum \alpha_n''\lambda^{-n}+\sum q_n\lambda^{2k-n}\sum \alpha_n\lambda^{-n}=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при λ^{2k-n}, получаем, что при всех целых значениях n выполняются равенства

$$\sum_m \alpha_{n-m}\left(q_m+\sum_\nu \beta_\nu'\beta_{m-\nu}'\right)+\sum_m \alpha_{n-m}\beta_{m-k}''+$$
$$+2\sum_m \alpha_{n-m}'\beta_{m-k}'+\alpha_{n-2k}''=0. \tag{4}$$

Первое нетривиальное условие соответствует $n=0$. Если положить в (4) $n=0, 1, \ldots, k-1$, то получим

$$q_m+\sum_\nu \beta_\nu'\beta_{m-\nu}'=0, \quad m=0, 1, \ldots, k-1$$

или

$$\beta_0'^2+q_0=0, \tag{5}$$

$$2\beta_0'\beta_m'+q_m+\sum_{\nu=1}^{m-1}\beta_\nu'\beta_{m-\nu}'=0, \quad m=1, \ldots, k-1. \tag{6}$$

Вследствие этих соотношений в первой сумме равенства (4) можно ограничиться суммированием по $m \geqslant k$. Если положить в равенстве (4) $n = k$, то придем к равенству

$$2\alpha_0'\beta_0' + \alpha_0\left(\beta_0'' + q_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \beta_\nu'\beta_{k-\nu}'\right) = 0, \tag{7}$$

а если заменить в равенстве (4) n на $k+n$, то получим

$$2\alpha_n'\beta_0' + \alpha_n\left(\beta_0'' + q_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \beta_\nu'\beta_{k-\nu}'\right) + \\ + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m}\left(\beta_m'' + q_{k+m} + \sum_{\nu=m+1}^{k-1} \beta_\nu'\beta_{k+m-\nu}'\right) + \\ + 2\sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m}'\beta_m' + \alpha_{n-k}'' = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Мы видим, таким образом, что если α_n и β_n удовлетворяют соотношениям (5) — (8), то ряд (3) формально удовлетворяет уравнению (1). При этом пустые суммы (то есть суммы, верхний предел суммирования которых меньше нижнего предела) считаются равными нулю. Так как $q_0 \neq 0$, то можно выбрать одну из ветвей функции $[-q_0(x)]^{1/2}$. Тогда равенство (5) определяет β_0 с точностью до произвольного постоянного. Кроме того, $\beta_0' \neq 0$ и, следовательно, равенства (6) рекуррентно определяют функции $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$, каждая из которых также определена с точностью до произвольного постоянного. Уравнение (7) позволяет найти α_0 с точностью до постоянного множителя, после чего из уравнения (8) можно рекуррентно найти функции $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, каждая из которых определена с точностью до слагаемого вида $C_n\alpha_0$, где C_n — постоянная величина. Соответственно двум ветвям $(-q_0)^{1/2}$ мы получаем два формальных решения, имеющих вид (3).

Второй тип формальных решений имеет вид

$$\exp\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x)\lambda^{k-1}\right]. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), имеем

$$\sum \beta_n''\lambda^{k-n} + \left(\sum \beta_n'\lambda^{k-n}\right)^2 + \sum q_n\lambda^{2k-n} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при λ^{2k-n}, получаем соотношения

$$\beta_0'^2 + q_0 = 0, \tag{10}$$

$$2\beta_0'\beta_n' + q_n + \sum_{m=1}^{n-1} \beta_m'\beta_{n-m}' = 0, \quad n = 1, \ldots, k-1, \tag{11}$$

$$2\beta_0'\beta_n' + q_n + \sum_{m=1}^{n-1} \beta_m'\beta_{n-m}' + \beta_{n-k}'' = 0, \ n = k, k+1, \ldots \tag{12}$$

Существуют два линейно независимых формальных решения этого типа.

Связь между этими двумя типами формальных решений совершенно очевидна. Уравнения (10) и (11) тождественны с уравнениями (5) и (6), а $\sum \alpha_n \lambda^{-n}$ является формальным разложением

$$\exp\left(\sum_{n=k}^{\infty} \beta_n \lambda^{k-n}\right).$$

На протяжении этого пункта мы предполагали, что $q(x, \lambda)$ как функция от λ имеет при $\lambda = \infty$ полюс четного порядка. Если полюс имеет нечетный порядок, то решений вида (3) и (9) не существует, и вместо разложения по степеням λ надо разлагать по степеням $\lambda^{1/2}$.

4.3. Асимптотические решения

Мы покажем теперь, что при некоторых предположениях дифференциальное уравнение 4.2(1) обладает фундаментальной системой решений, которые асимптотически представляются полученными в предыдущем пункте формальными решениями. При этом несущественно, будем ли мы сравнивать решения уравнения 4.2(1) с выражениями

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n(x) \lambda^{-n} \exp\left[\sum_{\nu=0}^{k-1} \beta_\nu(x) \lambda^{k-\nu}\right],$$

где α_n и β_ν удовлетворяют соотношениям 4.2(5) — (8), или с выражениями

$$\exp\left[\sum_{n=0}^{k+N-1} \beta_n(x) \lambda^{k-n}\right],$$

где β_n удовлетворяют соотношениям 4.2(10) — (12). В самом деле, коэффициенты α и β можно выбрать так, чтобы отношение этих двух выражений имело вид $1+O(\lambda^{-N})$.

Зафиксируем положительное целое число N и положим

$$Y_j(x)=\exp\left[\sum_{n=0}^{2k+N-1}\beta_{nj}(x)\lambda^{k-n}\right],\quad j=1,2, \tag{1}$$

где $\beta'_{01}=-\beta'_{02}$ и при каждом j коэффициенты β_{nj} удовлетворяют соотношениям 4.2(10) — (12). Эти коэффициенты полностью определяются функциями $q_0, \ldots, q_{2k+N-1}$ и некоторыми производными этих функций. Будем говорить, что функции q_n имеют достаточное число производных, если все производные этих функций, нужные для определения функций β_{nj}, $n=0, \ldots, 2k+N-1$, существуют и непрерывны. Мы считаем, что x изменяется в ограниченном замкнутом интервале I: $a\leqslant x\leqslant b$, а λ изменяется в области S: $|\lambda|\geqslant\lambda_1$, $\varphi_0\leqslant\arg\lambda\leqslant\varphi_1$. Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Пусть для любого фиксированного λ в S $q(x,\lambda)$ является непрерывной функцией от x на интервале I; пусть, далее,

$$q(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{2k+N-1}q_n(x)\lambda^{2k-n}+O(\lambda^{-N}) \tag{2}$$

равномерно по x и $\arg\lambda$, когда $\lambda\to\infty$ в S. Здесь $q_n(x)$ — функции, дифференцируемые достаточное число раз на интервале I, причем

$$\operatorname{Re}\{\lambda^k[-q_0(x)]^{1/2}\}\neq 0, \tag{3}$$

если λ принадлежит S и x принадлежит I. Тогда дифференциальное уравнение

$$y''+q(x,\lambda)y=0 \tag{4}$$

имеет такую фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, что

$$\begin{aligned} y_j(x)&=Y_j(x)[1+O(\lambda^{-N})],\\ y'_j(x)&=Y'_j(x)[1+O(\lambda^{-N})] \end{aligned} \tag{5}$$

равномерно по x и $\arg\lambda$, когда $\lambda\to\infty$ в S.

Докажем эту теорему методом, аналогичным использованному в п. 3.3. В силу соотношений (3) и 4.2(10) можно выбрать β_{01} и β_{02} так, чтобы для любого λ в S $\operatorname{Re}[\lambda^k \beta_{01}(x)]$ была возрастающей функцией от x, а $\operatorname{Re}[\lambda^k \beta_{02}(x)]$ — убывающей функцией. Из равенства (1) следует тогда, что для любого достаточно большого λ из области S, $|Y_1(x)|$ является возрастающей, а $|Y_2(x)|$ — убывающей функцией от x.

Чтобы установить существование и асимптотические свойства решения $y_1(x)$, сделаем в уравнении (4) подстановку

$$y_1(x) = Y_1(x)\, z(x). \tag{6}$$

Мы получим

$$z'' + 2\frac{Y_1'}{Y_1} z' + F(x, \lambda)\, z = 0, \tag{7}$$

где

$$F(x, \lambda) = \frac{Y_1''}{Y_1} + q = \\ = \sum_{n=0}^{2k+N-1} \beta_{n1}'' \lambda^{k-n} + \Big(\sum_{n=0}^{2k+N-1} \beta_{n1}' \lambda^{k-n}\Big)^2 + q. \tag{8}$$

В силу соотношений (2) и 4.2(10) — (12), имеем

$$F(x, \lambda) = O(\lambda^{-N})$$

равномерно по x и $\arg\lambda$, когда $\lambda \to \infty$ в S. Уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[Y_1^2(x) \frac{dz}{dx}\right] + Y_1^2(x)\, F(x, \lambda)\, z = 0.$$

Дважды интегрируя и выбирая соответствующим образом произвольные постоянные, получим

$$z(x) = 1 - \int_a^x K(x, t)\, F(t, \lambda)\, z(t)\, dt, \tag{9}$$

где

$$K(x, t) = \int_t^x Y_1^2(t)\, Y_1^{-2}(s)\, ds.$$

Так как функция $|Y_1(x)|$ возрастает, то $|Y_1(t)| \leqslant |Y_1(s)|$ и

$$|K(x, t)| \leqslant (b - a), \quad a \leqslant t \leqslant x \leqslant b.$$

Существование $z(x)$ вытекает теперь из общей теории интегральных уравнений Вольтерра либо может быть установлено с помощью метода последовательных приближений. Из равенств (8) и (9) вытекает, что когда $\lambda \to \infty$ в S, то $z(x) = 1 + O(\lambda^{-N})$ равномерно по x и $\arg \lambda$. Кроме того, функция $z(x)$ дифференцируема, причем

$$z'(x) = -\int_a^x Y_1^2(t)\, Y_1^{-2}(x)\, F(t, \lambda)\, z(t)\, dt = O(\lambda^{-N}).$$

Но тогда

$$y_1'(x) = \\ = Y_1'(x)\left[z(x) + \frac{Y_1(x)}{Y_1'(x)} z'(x)\right] = Y_1'(x)\left[1 + O(\lambda^{-N})\right].$$

Тем самым равенство (5) доказано при $j = 1$. Доказательство при $j = 2$ протекает точно так же, за исключением того, что в качестве постоянного предела интегрирования в интегральном уравнении принимается не a, а b.

4.4. Приложения к бесселевым функциям

Мы применим теперь методы, развитые в предыдущих двух пунктах для доказательства асимптотических формул *)

$$J_\lambda(\lambda \operatorname{sch} \beta) \sim (2\pi\lambda \operatorname{th} \beta)^{-1/2} \exp(\lambda \operatorname{th} \beta - \lambda\beta), \quad \lambda \to \infty, \quad (1)$$

$$H_\lambda^{(1,2)}(\lambda \sec \beta) \sim \left(\frac{1}{2}\pi\lambda \operatorname{tg} \beta\right)^{-1/2} \exp[\pm i(\lambda \operatorname{tg} \beta - \lambda\beta - \pi/4)], \quad (2)$$
$$\lambda \to \infty.$$

Равенство (1) имеет место при $\beta > 0$ равномерно по β в интервале $0 < \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 < \infty$. Равенство (2) справедливо при $0 < \beta < \pi/2$, равномерно по β в интервале $0 < \varepsilon \leqslant \beta \leqslant \pi/2 - \varepsilon$; в этом равенстве (а также ниже в равенстве (18)) верхний знак соответствует функции $H_\lambda^{(1)}$, а нижний знак — функции $H_\lambda^{(2)}$. Оба эти результата могут быть выведены из интегральных представлений бесселевых функций с помощью метода перевала (Ватсон, 1949, пп. 8.4 и 8.41).

*) Не следует смешивать использованный в этих формулах символ β с используемой ниже функцией $\beta(x)$.

Функции

$$x^{1/2}J_\lambda(\lambda x),\quad x^{1/2}Y_\lambda(\lambda x),\; x^{1/2}H_\lambda^{(1)}(\lambda x),\quad x^{1/2}H_\lambda^{(2)}(\lambda x)$$

являются решениями дифференциального уравнения

$$y'' + [\lambda^2 - (\lambda^2 - 1/4)\,x^{-2}]\,y = 0. \tag{3}$$

Это уравнение имеет вид 4.3 (4), где

$$k = 1,\; q_0(x) = 1 - x^{-2},\quad q_2(x) = (2x)^{-2},$$

а остальные $q_n(x)$ тождественно равны нулю. Точки $x = 0, \infty$ являются особыми точками уравнения (3), а $x = 1$ является так называемой *точкой перехода*, то есть точкой, в которой при всех значениях λ нарушается условие 4.3 (3). На любом интервале $a \leqslant x \leqslant b$, не содержащем ни особых точек, ни точки перехода, теорема из п. 4.3 дает общий вид асимптотических решений, но она недостаточна для того, чтобы получить выражения y_1 и y_2 через стандартные бесселевы функции. Для того чтобы выразить наше решение через бесселевы функции, увеличим интервал так, чтобы один из его концов совпал с особой точкой уравнения (3). В этом случае уже нельзя воспользоваться теоремой п. 4.3; однако, применяя использованные там методы, мы получим требуемый результат.

Рассмотрим сначала уравнение (3) на интервале $0 \leqslant x \leqslant b < 1$. Из равенства 4.2 (5) вытекает

$$\beta_0'(x) = \pm (x^{-2} - 1)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\pm\beta_0(x) = \beta(x) = \int (x^{-2} - 1)^{1/2}\,dx =$$
$$= (1 - x^2)^{1/2} + \ln\frac{1}{1 + (1 - x^2)^{1/2}}. \tag{4}$$

Из 4.2 (7) получаем

$$2\alpha_0'\beta_0' + \alpha_0\beta_0'' = 0$$

и потому

$$\alpha_0(x) = [\beta'(x)]^{-1/2} = \alpha(x) = x^{1/2}(1 - x^2)^{-1/4}. \tag{5}$$

С помощью определенных нами функций α и β образуем функции

$$Y_1(x) = \alpha(x)\,e^{\lambda\beta(x)},\quad Y_2(x) = \alpha(x)\,e^{-\lambda\beta(x)}, \tag{6}$$

которые соответствуют главным членам формальных решений.

Интегральное уравнение для $z = y_1/Y_1$ имеет вид

$$z(x) = 1 - \int_0^x K(x, t) F(t, \lambda) z(t)\,dt. \tag{7}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$F(x, \lambda) = \frac{Y_1''}{Y_1} + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{4x^2} = \frac{4 + x^2}{4(1 - x^2)^2}, \tag{8}$$

а потому функция F ограничена на нашем интервале. Кроме того, из равенства (5) следует, что $\alpha^{-2} = \beta'$ и потому

$$K(x, t) = \int_t^x \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}\right]^2 \exp\{2\lambda[\beta(t) - \beta(s)]\}\,ds =$$

$$= \frac{\alpha^2(t)}{2\lambda}(1 - \exp\{2\lambda[\beta(t) - \beta(x)]\}). \tag{9}$$

Но $\beta(x)$ является возрастающей функцией, $\beta(t) - \beta(x) \leqslant 0$ при $0 < t \leqslant x \leqslant b < 1$. Поэтому показательная функция в формуле (9) ограничена, если $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$; ограничена и функция $\alpha^2(t)$. Мы получаем, таким образом, оценку

$$|F(t, \lambda) K(x, t)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}, \tag{10}$$

справедливую при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $0 < t \leqslant x \leqslant b < 1$. Коэффициент C не зависит от λ, x и t.

Из полученных результатов легко вытекает, что интегральное уравнение (7) можно решить с помощью метода последовательных приближений, причем решение имеет вид

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x),$$

где

$$z_0(x) = 1,$$

$$z_{n+1}(x) = \int_0^x K(x, t) F(t, \lambda) z_n(t)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

В самом деле, из оценки (10) легко получить по индукции

$$|z_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{Cx}{|\lambda|}\right)^n.$$

Поэтому ряд, определяющий z, сходится равномерно по x и λ, если λ лежит вне некоторой окрестности нуля; функция $z(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, имеет непрерывную вторую производную, удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению и такова, что

$$z(x) = 1 + O\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Тем самым установлено существование такого решения y_1 уравнения (3), что

$$y_1(x) = Y_1(x)\left[1 + O\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right], \tag{11}$$
$$0 < x \leqslant b < 1, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Нам осталось показать, что это решение отличается лишь постоянным множителем от $J_\lambda(\lambda x)$.

Так как y_1 является решением уравнения (3), то

$$x^{-1/2} y_1(x) = c_1(\lambda) J_\lambda(\lambda x) + c_2(\lambda) J_\lambda(\lambda x). \tag{12}$$

Зафиксируем теперь λ и рассмотрим равенство (12) при $x \to 0$. Хорошо известно (Ватсон, 1949, стр. 55 и 78), что

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \frac{(\lambda x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad x \to 0,$$

$$Y_\lambda(\lambda x) \sim \frac{(\lambda x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \operatorname{ctg}\lambda\pi - \frac{(\lambda x/2)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \operatorname{cosec}\lambda\pi, \quad x \to 0.$$

Из соотношений (11), (6), (5) и (4) вытекает, что *)

$$x^{-1/2} y_1(x) \sim x^{-1/2} Y_1(x) \sim e^{\lambda\xi(x)} \sim (x/2)^\lambda e^\lambda, \quad x \to 0.$$

Поэтому, разделив обе части равенства (12) на $(x/2)^\lambda$ и перейдя к пределу, при $x \to 0$ получаем, пользуясь указанными выше соотношениями, что

$$c_1(\lambda) = e^\lambda \lambda^{-\lambda} \Gamma(\lambda+1), \quad c_2(\lambda) = 0.$$

По формуле Стирлинга отсюда следует

$$c_1(\lambda) = (2\pi\lambda)^{1/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

---

*) Заметим, что Y_1 — приближенное решение, Y_λ — бесселева функция второго рода.

Мы доказали, таким образом, равенство

$$J_\lambda(\lambda x) = \frac{\lambda^\lambda e^{-\lambda} x^{-1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} Y_1(x)\left[1+O\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] =$$
$$= (2\pi\lambda x)^{-1/2} Y_1(x)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \tag{13}$$

где $0 < x \leqslant b < 1$ и $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Если положить $x = \sec\beta$, подставить вместо λ выражение (6) (принимая во внимание равенства (4) и (5)) и считать λ в последней формуле положительным, мы получим равенство (1).

Рассмотрим теперь уравнение (3) на интервале $1 < a \leqslant x < \infty$. В этом случае

$$\alpha(x) = x^{1/2}(x^2-1)^{-1/4} = [-i\beta'(x)]^{-1/2}, \tag{14}$$
$$\beta(x) = i\int(1-x^{-2})^{1/2}\,dx = i(x^2-1)^{1/2} - i\arccos x^{-1},$$

где $\arccos x$ — главное значение функции, обратной функции $\cos x$, в частности, $\arccos(x^{-1}) \to \pi/2$, когда $x \to \infty$. Функции сравнения имеют теперь вид (6), где α и β определяются формулами (14). Интегральное уравнение для $z = y_1/Y_1$ имеет вид

$$z(x) = 1 + \int_x^\infty K(x, t)F(t, \lambda)z(t)\,dt. \tag{15}$$

Равенство (8) сохраняет силу и в этом случае; оно показывает, что $F(t, \lambda) = O(t^{-2})$ при $t \geqslant b > 1$ и всех λ. Так как в нашем случае $\alpha^{-2} = -\beta'$, то вычисление интеграла в формуле (9) приводит к равенству

$$K(x, t) = \frac{-\alpha^2(t)}{2\lambda}(1-\exp\{2\lambda[\beta(t)-\beta(x)]\}).$$

Но $-i\beta$ является возрастающей функцией от x, а $t \geqslant x$; поэтому показательная функция в полученном равенстве ограничена, если $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Ограничена и функция $\alpha^2(t)$, а потому оценка

$$|F(t, \lambda)K(x, t)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|t^2} \tag{16}$$

справедлива при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $1 < a \leqslant x \leqslant t$; коэффициент C в этой оценке не зависит от λ, x, t.

Положим теперь

$$z_0(x) = 1,$$
$$z_{n+1}(x) = \int_x^\infty K(x, t) F(t, \lambda) z_n(t)\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$
$$z(x) = \sum_{n=0}^\infty z_n(x).$$

Из оценки (16) легко вытекает по индукции, что

$$|z_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{C}{|\lambda| x}\right)^n,$$

а потому ряд, определяющий z, равномерно сходится, если λ лежит вне некоторой фиксированной окрестности нуля. Функция $z(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, имеет непрерывную вторую производную, удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению и такова, что

$$z(x) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right).$$

Отсюда вытекает существование такого решения y_1 уравнения (3), что

$$y_1(x) = Y_1(x)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right], \tag{17}$$
$$1 < a \leqslant x < \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Нам осталось показать, что это решение отличается от $H_\lambda^{(1)}(\lambda x)$ лишь постоянным множителем.

Так как y_1 является решением уравнения (3), то

$$x^{-1/2} y_1(x) = c_1(\lambda) H_\lambda^{(1)}(\lambda x) + c_2(\lambda) H_\lambda^{(2)}(\lambda x). \tag{18}$$

Зафиксируем значение λ и рассмотрим поведение обеих частей этого равенства при $x \to \infty$. Хорошо известно (Ватсон, 1949, п. 7.2), что при $0 \leqslant \arg\lambda < \pi$ имеем

$$H_\lambda^{(1,2)}(\lambda, x) \sim \left(\frac{2}{\pi\lambda x}\right)^{1/2} \exp\left[\pm i\left(\lambda x - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad x \to \infty,$$

а из соотношений (17) и (14) вытекает, что

$$y_1(x) \sim Y_1(x) \sim \exp[\lambda\beta(x)] \sim \exp[i\lambda x - i\lambda\pi/2], \quad x \to \infty.$$

Поэтому, умножая обе части равенства (18) на $x^{1/2}$ и пере-

ходя к пределу при $x \to \infty$, получаем

$$c_1(\lambda) = (1/2\pi\lambda)^{1/2} e^{i\pi/4}, \quad c_2(\lambda) = 0.$$

Если $\arg \lambda = \pi$, то следует использовать несколько иную асимптотическую формулу для $H_\lambda^{(2)}$; однако окончательный вывод остается тем же самым. Мы получаем, таким образом, асимптотическое равенство

$$H_\lambda^{(1)}(\lambda x) = (1/2\pi\lambda x)^{-1/2} e^{-i\pi/4} Y_1(x) \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right], \tag{19}$$

где $1 < a \leqslant x < \infty$ и $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что

$$H_\lambda^{(2)}(\lambda x) = (1/2\pi\lambda x)^{-1/2} e^{i\pi/4} Y_2(x) \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right], \tag{20}$$

где $1 < a \leqslant x < \infty$ и $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$. Считая λ положительным и полагая $x = \sec \beta$, мы получаем после подстановки выражений (6) и (14) формулу (2).

4.5. Точки перехода

Рассмотрим теперь снова дифференциальное уравнение Лиувилля

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r(x)] y = 0, \tag{1}$$

где λ — большое положительное число. Как и в п. 4.1, будем считать, что x — вещественное переменное, $p(x)$ — вещественная функция, имеющая непрерывную вторую производную, а $r(x)$ — функция, непрерывная на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Однако, в отличие от п. 4.1, допустим, что функция $p(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала (a, b). Назовем нули функции $p(x)$ *точками перехода* дифференциального уравнения (1). Ради определенности предположим, что $p(x)$ имеет простой нуль в точке $x = c$ и не обращается в нуль в остальных точках интервала $a \leqslant x \leqslant b$, причем $p'(c) > 0$, так что $p(x) < 0$, если $a \leqslant x < c$ и $p(x) > 0$, если $c < x \leqslant b$.

Мы видели выше, что на интервале $c + \varepsilon \leqslant x \leqslant b$, $\varepsilon > 0$, где функция $p(x)$ положительна, решения уравнения (1)

асимптотически имеют вид

$$c_1 [p(x)]^{-1/4} \cos\left\{\lambda \int [p(x)]^{1/2}\, dx\right\} + \\ + c_2 [p(x)]^{-1/4} \sin\left\{\lambda \int [p(x)]^{1/2}\, dx\right\}. \quad (2)$$

Аналогично можно показать, что на интервале $a \leqslant x \leqslant c - \varepsilon$, где функция $p(x)$ отрицательна, решения уравнения (1) асимптотически имеют вид

$$c_3 [-p(x)]^{-1/4} \exp\left\{\lambda \int [-p(x)]^{1/2}\, dx\right\} + \\ + c_4 [-p(x)]^{-1/4} \exp\left\{-\lambda \int [-p(x)]^{1/2}\, dx\right\}. \quad (3)$$

Справедливость этих асимптотических формул связана с тем, что функция $\rho(\xi)$ в формуле 4.1 (4) ограничена, следовательно, ни одна из этих асимптотических формул не имеет места при $x = c$. Как показывает равенство (2), справа от точки $x = c$ каждое решение уравнения (1) *быстро колеблется*; равенство же (3) показывает, что слева от точки $x = c$ все решения уравнения (1) *медленно изменяются*. Около точки $x = c$ происходит переход от одного типа поведения к другому.

Здесь возникают две проблемы. Первая из них состоит в «склеивании» асимптотических разложений, то есть в установлении связей между постоянными c_1, c_2 и постоянными c_3, c_4, которые имеют место, если формулы (2) и (3) являются асимптотическими представлениями на различных интервалах одного и того же решения уравнения (1); вторая проблема состоит в определении асимптотического вида решений уравнения (1) на интервале $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$.

Существуют два остроумных метода решения первой проблемы. Первый из этих методов был применен Джеффризом (1923) и открыт вновь Крамерсом несколькими годами позже. Он основан на том, что в окрестности точки $x = c$ функцию $p(x)$ можно приближенно заменить линейной функцией $(x - c)\, p'(c)$, а функцией $r(x)$ можно пренебречь. Получающееся при этом дифференциальное уравнение допускает решение в бесселевых функциях порядка $\pm 1/3$. Сравнение асимптотических формул для бесселевых функций с формулами (2) и (3) и приводит к искомым формулам, связывающим коэффициенты c_1, c_2 с коэффициентами c_3, c_4. Второй

метод, разработанный Цвааном (1929), заключается в обходе точек перехода. Если $p(x)$, $r(x)$ — аналитические функции от x, дифференциальное уравнение интегрируется вдоль пути, лежащего в комплексной плоскости, который состоит из вещественных интервалов $(a, c-\varepsilon)$, $(c+\varepsilon, b)$ и полукруга в комплексной плоскости, соединяющего $c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon$. Вдоль этого пути функция ρ, определенная формулой 4.1 (4), ограничена, а потому можно применить метод Лиувилля (или какой-нибудь вариант этого метода). Этот метод приводит к тем же самым формулам склеивания, что и первый. Оба метода можно распространить на случай, когда функция $p(x)$ имеет нуль произвольного порядка. Они известны как *WKB*- (или иногда *WKBJ*-) методы. Более подробное изложение этих методов см., например, в книге Морс и Фешбах (1960, стр. 90—104).

Значительно более трудной является вторая проблема, а именно, определение асимптотического вида решений уравнения (1) в интервале $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. По-видимому, не существует простых элементарных функций, описывающих переход от медленных колебаний к быстрым, поэтому приходится использовать для получения асимптотических формул некоторые высшие трансцендентные функции. Простейшим дифференциальным уравнением вида (1), имеющим точку перехода, является уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 xy=0. \tag{4}$$

Решения этого уравнения хорошо известны, и целесообразно искать асимптотические формулы для решений уравнения (1), выраженные через решения уравнения (4). Преобразование Лиувилля 4.1 (2) переводит уравнение 4.1 (1) в дифференциальное уравнение, коэффициенты которого приблизительно постоянны. Подобно этому, можно искать преобразование

$$\xi=\varphi(x), \quad \eta=\psi(x)\,y, \tag{5}$$

переводящее уравнение (1) в уравнение, приближенно имеющее вид (4). Преобразование (5) переводит уравнение (1) в

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}-2\frac{\psi'}{\psi}\right)\frac{d\eta}{d\xi}+\left[\frac{\lambda^2 p+r}{\varphi'^2}+\frac{\psi}{\varphi'^2}\frac{d^2\psi^{-1}}{dx^2}\right]\eta=0.$$

Для того чтобы это дифференциальное уравнение прибли-

женно совпадало с уравнением (4), определим сначала ψ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\varphi''}{\varphi'}-2\frac{\psi'}{\psi}=0. \tag{6}$$

Из этого уравнения находим, что $\psi=\varphi'^{1/2}$. Потом определяем φ из уравнения

$$\frac{p}{\varphi'^2}=\varphi. \tag{7}$$

Если φ и ψ определены указанным способом, то полученное выше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\lambda^2\xi\eta=\rho(\xi)\,\eta, \tag{8}$$

где

$$\rho(\xi)=\frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'^3}-\frac{3}{4}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^4}-\frac{r}{\varphi'^2}. \tag{9}$$

Из предположений о функциях p и r, сделанных в начале этого пункта, вытекает, что существует единственная вещественная функция φ, имеющая непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяющая уравнению (7). Для этой функции точная нижняя грань модуля ее производной отлична от нуля, а потому $\rho(\xi)$ является ограниченной функцией. Поэтому можно ожидать, что асимптотическая формула для решения уравнения (8) имеет вид

$$c_1H_1(\xi)+c_2H_2(\xi), \tag{10}$$

где $H_1(x)$ и $H_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (4).

Это обобщение метода Лиувилля было впервые применено для получения асимптотических формул, выражающих решение уравнения (1) на интервале $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$; однако ясно, что этим методом можно воспользоваться и на всем интервале (a, b). При этом вместо трех различных асимптотических формул, имеющих место на интервалах $(a, c-\varepsilon)$, $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, $(c+\varepsilon, b)$ соответственно, получается одно *равномерное асимптотическое представление решений* уравнения (1) на всем интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Этот метод был впервые введен Лангером, который разработал его в ряде работ, частично указанных в конце этой главы. Среди раз-

рабатывавших метод Лангера следует отметить Черри. Существует указатель литературы, касающийся этого метода (см. ссылку в конце главы).

Прежде чем детально описывать этот метод, укажем кратко некоторые свойства решений уравнения (4).

4.6. Функции Эйри

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} - zw = 0 \tag{1}$$

можно привести к дифференциальному уравнению, которому удовлетворяют бесселевы функции порядка 1/3 (Ватсон, 1949, п. 6.4). Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}. \tag{2}$$

Линейно независимыми решениями уравнения (1) являются так называемые *функции Эйри* первого и второго вида

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{3} z^{1/2} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}(\zeta), \\ Bi(z) &= \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Непосредственное вычисление приводит к равенству

$$Ai(z)\, Bi'(z) - Ai'(z)\, Bi(z) = \pi^{-1}. \tag{4}$$

Справедливы также формулы

$$\begin{aligned} Ai(-z) &= \frac{1}{3} z^{1/2} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)], \\ Bi(-z) &= \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)]. \end{aligned} \tag{5}$$

При вещественных значениях x имеют место интегральные представления

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \pi^{-1} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \\ Bi(x) &= \pi^{-1} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти интегральные представления могут быть преобразованы в интегральные представления, которые содержат контурные интегралы и справедливы при комплексных значениях x. $Ai(z)$ и $Bi(z)$ являются целыми функциями от z; при вещественных значениях z они принимают вещественные значения. Функция $Ai(z)$ имеет бесконечно много нулей, причем все нули этой функции вещественны и отрицательны (Ватсон, 1949, п. 15.7). Для любого целого m функция $w_m(z) = Ai(\omega^m z)$ также является решением уравнения (1). Непосредственное вычисление показывает, что

$$w_m(z)\, w_k'(z) - w_m'(z)\, w_k(z) = \\ = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sin\frac{\pi(m-k)}{3} \exp\left[i\pi\left(\frac{m+k}{3} + \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{7}$$

Отсюда вытекает, что функции w_m и w_{m+1} линейно независимы. С другой стороны, любые три w_m из функций связаны линейной зависимостью. В частности,

$$w_m(z) + \omega w_{m+1}(z) + \omega^2 w_{m+2}(z) = 0. \tag{8}$$

Далее, имеем

$$Bi(z) = i\left[\omega^2 Ai(\omega^2 z) - \omega Ai(\omega z)\right]. \tag{9}$$

Разложения функций $Ai(z)$ и $Bi(z)$ в степенные ряды вытекают из равенства (3). В частности,

$$\begin{gathered} 3^{2/3} Ai(0) = 3^{1/6}\, Bi(0) = \frac{1}{\Gamma(2/3)}, \\ -3^{1/3} Ai'(0) = 3^{-1/6} Bi'(0) = \frac{1}{\Gamma(1/3)}. \end{gathered} \tag{10}$$

Асимптотическое поведение функции $Ai(z)$ было изучено в п. 2.6 при $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$. Полученные результаты можно распространить на большую область с помощью поворота в t-плоскости пути интегрирования в формуле 2.6(3). При этом получается

$$Ai(z) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\zeta}\left[1 + O(\zeta^{-1})\right], \tag{11}$$

$$z \to \infty, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Результаты, имеющие место в секторах, содержащих отрицательную полуось, могут быть получены с помощью фор-

мулы (8). Они имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&Ai(z)=\frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}\{e^{-\zeta}[1+O(\zeta^{-1})]+ie^{\zeta}[1+O(\zeta^{-1})]\},\\
&\qquad z\to\infty,\ \pi/3<\arg z<5\pi/3;\\
&Ai(z)=\frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}\{e^{-\zeta}[1+O(\zeta^{-1})]-ie^{\zeta}[1+O(\zeta^{-1})]\},\\
&\qquad z\to\infty,\ -5\pi/3<\arg z<-\pi/3.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Из равенства (9) вытекает

$$
Bi(z)=\pi^{-1/2}z^{-1/4}e^{\zeta}[1+O(\zeta^{-1})],\qquad z\to\infty,\quad -\pi/3<\arg z<\pi/3. \tag{13}
$$

Все асимптотические разложения выполняются равномерно по $\arg z$, если z изменяется в замкнутых секторах, целиком расположенных внутри указанных выше открытых секторов.

Из полученных асимптотических формул вытекает, что

$$
(1+|z|^{1/4})\,e^{\zeta}Ai(z),\qquad -\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi, \tag{14}
$$

и

$$
(1+|z|^{1/4})\,e^{-\zeta}Bi(z),\qquad -\pi/3\leqslant\arg z\leqslant\pi/3 \tag{15}
$$

являются ограниченными функциями от z. Ограничены и величины, обратные этим функциям, если, разумеется, нули функции (14) соответствующим образом исключены; например, это имеет место, если $-\pi+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$; функция (15) не имеет нулей.

Относительно дальнейших сведений о функциях Эйри см. книгу Миллера (1946); в ней приведены также таблицы значений этих функций.

Мы закончим этот пункт доказательством следующего неравенства. *Если $w(z)$ является решением уравнения* (1), *удовлетворяющим условиям $w(t)=0$, $w'(t)=1$, то при*

$$
x>0,\quad t>0,\quad \xi=\frac{2}{3}x^{3/2}>0,\quad \tau=\frac{2}{3}t^{3/2}>0
$$

имеет место неравенство

$$
0<\frac{2(xt)^{1/4}w(x)}{e^{\xi-\tau}-e^{\tau-\xi}}\leqslant 1. \tag{16}
$$

Для доказательства используем теорему сравнения Штурма. Функция

$$v(x) = \frac{e^{\xi-\tau} - e^{\tau-\xi}}{2(xt)^{1/4}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v'' - \left(x + \frac{5}{16x^2}\right)v = 0 \tag{17}$$

и тем же самым начальным условиям в точке t, что и функция w. Из уравнений (1) и (17) вытекает, что обе функции $v(x)$ и $w(x)$ отличны от нуля, если $x > 0$, $t > 0$, $x \neq t$. Рассмотрим функцию $f(x) = w(x)/v(x)$, $x \neq t$. Очевидно, что $f(x) \to 1$, когда $x \to t$, а потому мы положим $f(t) = 1$. Функции v и w имеют одинаковые знаки при $x \neq t$. Поэтому

$$\frac{d}{dx}(w'v - wv') = w''v - wv'' = -\frac{5vw}{16x^2} \leqslant 0$$

и, следовательно, $w'v - wv'$ является убывающей функцией от x. Так как эта функция обращается в нуль при $x = t$, то $f'(x) < 0$ при $x > t$ и $f'(x) > 0$, если $0 < x < 1$. Таким образом, $f'(x)$ имеет максимум при $x = t$ и, значит, $0 < f(x) \leqslant 1$, если $0 < x$, $t < \infty$. Принимая во внимание определение функций f и v, мы приходим к неравенству (16).

4.7. Асимптотические решения, справедливые в области перехода

Предположим, что (a, b) — ограниченный интервал, c — внутренняя точка этого интервала, $p(x)$ — вещественная функция, заданная на этом интервале, имеющая непрерывную производную второго порядка, и такая, что $p(x) < 0$ при $a \leqslant x < c$, $p(x) > 0$ при $c < x \leqslant b$, $p(c) = 0$, $p'(c) \neq 0$. Пусть, далее, $r(x, \lambda)$ — функция, заданная в области $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda \in S$, где S задается неравенствами $|\lambda| \geqslant \lambda_1$, $\varphi_0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \varphi_1$, причем функция $r(x, \lambda)$ ограничена в этой области и при каждом фиксированном значении λ из S $r(x, \lambda)$ является непрерывной функцией от x на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + [\lambda^2 p(x) + r(x, \lambda)]\, y = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $\varphi(x)$ (единственное) вещественное решение уравнения 4.5(7), имеющее непрерывную производную; это решение дается формулами

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}[\varphi(x)]^{3/2} &= f(x) = \int_c^x [p(t)]^{1/2}\,dt, \quad x \geqslant c, \\ \frac{2}{3}[-\varphi(x)]^{3/2} &= f(x) = \int_x^c [-p(t)]^{1/2}\,dt, \quad x \leqslant c. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x) > 0$, если $x > c$, $\varphi(x) < 0$, если $x < c$ и все дробные степени имеют положительные значения.

Функции

$$\begin{aligned} Y_m(x) &= [\varphi'(x)]^{-1/2}\,Ai\,[-\lambda^{2/3}e^{2\pi i m/3}\varphi(x)], \quad m = 0, \pm 1, \\ Y_2(x) &= [\varphi'(x)]^{-1/2}\,Bi\,[-\lambda^{2/3}\varphi(x)] \end{aligned} \tag{3}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$Y''(x) + \left[\lambda^2 p(x) + \frac{1}{2}\{\varphi, x\}\right] Y = 0, \tag{4}$$

где

$$\{\varphi, x\} = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$$

— *производная Шварца* от φ. Это дифференциальное уравнение вытекает из формул 4.6(1) и 4.5(7). Так как дифференциальные уравнения (1) и (4) отличаются сравнительно малыми членами, можно рассматривать решения уравнения (4) как главные члены формальных решений.

При сделанных выше предположениях *дифференциальное уравнение* (1) *обладает решениями, которые в соответствующих секторах комплексной λ-плоскости асимптотически представимы функциями Y_m*, $m = -1, 0, 1, 2$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательствам, проведенным в пп. 3.3, 3.4 и 4.3; мы разобьем его на несколько этапов.

Пусть $Y(x)$ — любое решение уравнения (4), *а $K(x, t)$ — решение уравнения* (4), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$K(t, t) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x}(t, t) = 1; \tag{5}$$

пусть, далее, $a \leqslant x_0 \leqslant b$. *Тогда решение интегрального уравнения*

$$y(x) = Y(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, t)\, F(t, \lambda),\ y(t)\, dt, \tag{6}$$

где

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2}\{\varphi, x\} - r(x, \lambda) \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство. Уравнение (6) является интегральным уравнением Вольтерра с непрерывным ядром. Для любого фиксированного значения λ, принадлежащего области S, существование и единственность решения этого уравнения вытекают из общей теории интегральных уравнений Вольтерра (либо могут быть доказаны аналогично тому, как это было сделано в п. 4.3). Это решение имеет непрерывную производную второго порядка, причем подстановка в уравнение (1) показывает, что y удовлетворяет этому уравнению.

При $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ *для всех* λ *из* S *выполняется неравенство*

$$|K(x, t)\, F(t, \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A \exp\left|\frac{2}{3}\operatorname{Re}\{[-\lambda^{2/3}\varphi(x)]^{3/2} - [-\lambda^{2/3}\varphi(t)]^{3/2}\}\right|}{|r|\,(|\lambda|^{-1/6} + |\varphi(x)|^{1/4})\,(|\lambda|^{-1/6} + |\varphi(t)|^{1/4})\,[\varphi'(x)\,\varphi'(t)]^{1/2}}, \tag{8}$$

где A *не зависит от* x, t *и* λ. Все дробные степени имеют здесь главные значения.

Доказательство этого неравенства проводится различными способами в зависимости от взаимного положения точек x, t и в зависимости от $\arg \lambda$. Мы проведем детальное рассуждение при $a \leqslant x,\ t \leqslant c,\ -\pi/2 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi/2$. Так как, в силу (3) и 4.6(4),

$$Y_0' Y_2 - Y_0 Y_2' = -\lambda^{2/3}(Ai' Bi - Ai Bi') = \pi^{-1}\lambda^{2/3},$$

то функция

$$K(x, t) = \pi\lambda^{-2/3}[Y_0(x)\, Y_2(t) - Y_0(t)\, Y_2(x)] \tag{9}$$

удовлетворяет равенствам (4) и (5). Но $\varphi < 0$ и $|\arg(-\lambda^{2/3}\varphi)| \leqslant \pi/3$, а потому выражения 4.6(14) и 4.6(15)

ограничены; следовательно, найдется число B, не зависящее от x, t и λ, такое, что

$$|Y_0| \leqslant \frac{B \exp\left\{-\frac{2}{3} \operatorname{Re}[-\lambda^{2/3}\varphi]^{3/2}\right\}}{(1+|\lambda|^{1/6}|\varphi|^{1/4})[\varphi']^{1/2}}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для Y_2. Пользуясь этими оценками и равенством (9), мы убеждаемся в справедливости неравенства (8) в рассматриваемом случае. Для того чтобы доказать неравенство (8) в остальных случаях, надо выразить функции Y_0 и Y_2, а следовательно, и функцию K, через два линейно независимых решения уравнения (4), одно из которых ограничено при $\lambda \to \infty$ (в рассмотренном выше случае таким было решение Y_0) и применить потом оценки, вытекающие из 4.6(14), (15).

Докажем теперь, что существуют решения y_m, $m = -1$, 0, 1, 2, соответствующие решениям Y_m и асимптотически представимые ими. При этом оказывается необходимым налагать в каждом случае ограничения на $\arg \lambda$. Эти ограничения соответствуют проведению разрезов на λ^2-плоскости.

Для y_0 и y_2 мы предположим $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и определим эти функции как решения интегральных уравнений Вольтерра

$$y_0(x) = Y_0(x) + \int_a^x K(x, t) F(t, \lambda) y_0(t)\, dt, \tag{10}$$

$$y_2(x) = Y_2(x) + \int_c^x K(x, t) F(t, \lambda) y_2(t)\, dt. \tag{11}$$

Для любого фиксированного значения λ из S существование решений этих интегральных уравнений вытекает из общей теории интегральных уравнений Вольтерра (либо может быть доказано методом последовательных приближений). Мы покажем сейчас, что $y_0 \sim Y_0$, $y_2 \sim Y_2$, если $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Если $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и $a \leqslant x \leqslant b$ или если $\lambda \geqslant 0$ и $a \leqslant x \leqslant c$, то $Y_0 \neq 0$, $Y_2 \neq 0$. В этом случае можно положить $y_0 = Y_0 z_0$, $y_2 = Y_2 z_2$ и получить интегральное уравнение для функций z_0 и z_2. Так как при сделанных предположениях функции 4.6(14) и 4.6(15) ограничены и точные нижние грани

их модулей отличны от нуля, то

$$\left|\frac{Y_0(t)}{Y_0(x)}\right| \leqslant B\left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(t)}\right]\frac{|\lambda|^{-1/6}+|\varphi(x)|^{1/4}}{|\lambda|^{-1/6}+|\varphi(t)|^{1/4}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{2}{3}\operatorname{Re}\{[-\lambda^{2/3}\varphi(t)]^{3/2}-[-\lambda^{2/3}\varphi(x)]^{3/2}\}\right).$$

Аналогичная оценка имеет место для $|Y_2(t)/Y_2(x)|$. Комбинируя эти оценки с неравенством (8), мы получаем неравенства, которым удовлетворяют ядра интегральных уравнений для z_0 и z_2. Они имеют вид

$$\left|\frac{Y_0(t)}{Y_0(x)}K(x, t)F(t, \lambda)\right| \leqslant \frac{C}{|\lambda|\,\varphi'(t)\,|\varphi(t)|^{1/2}}, \tag{12}$$

$$a\leqslant t\leqslant x\leqslant b \text{ и } \operatorname{Im}\lambda\neq 0 \text{ или } a\leqslant t\leqslant x\leqslant c \text{ и } \lambda>0.$$

$$\left|\frac{Y_2(t)}{Y_2(x)}K(x, t)F(t, \lambda)\right| \leqslant \frac{C}{|\lambda|\,\varphi'(t)\,|\varphi(t)|^{1/2}}, \tag{13}$$

$$a\leqslant x\leqslant b,\ |t-c|\leqslant|x-c| \text{ и } \operatorname{Im}\lambda\neq 0$$
$$\text{или } a\leqslant x\leqslant t\leqslant c \text{ и } \lambda>0.$$

Для каждого фиксированного λ интегральное уравнение для z_m, $m=0,2$, имеет ограниченное решение. Пусть $Z_m(\lambda)$ является максимумом для $|z_m(x)|$ при $a\leqslant x\leqslant b$. Из интегральных уравнений и неравенств (12), (13) имеем

$$Z_m(\lambda)\leqslant 1+\frac{c}{\lambda}Z_m(\lambda)\int_a^b\frac{dt}{|p(t)|^{1/2}}.$$

Для достаточно больших значений $|\lambda|$ выполняется неравенство $|Z_m(\lambda)|\leqslant 2$, а из соотношений (10), (11), (12), (13) вытекает, что если $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, и при вещественных значениях λ имеем $a\leqslant x\leqslant c$, то

$$y_m(x)=Y_m(x)[1+O(\lambda^{-1})] \tag{14}$$

равномерно по x, когда $\lambda\to\infty$, $m=0,2$.

В случае, когда λ принадлежит положительной полуоси, функции Y_0 и Y_2 имеют нули при $x>c$ и соотношение (14) теряет силу вблизи этих нулей. Применимый в этом случае результат может быть получен из соотношений (10) и (11) с помощью равенства (9) и оценок для $Y_0(t)$ и $Y_2(t)$. Из

равенства (9) получаем

$$y_0(x) = Y_0(x)\left[1 + \pi\lambda^{-2/3}\int_a^x Y_2(t)F(t, \lambda)y_0(t)\,dt\right] -$$

$$- \pi\lambda^{-2/3}Y_2(x)\int_a^x Y_0(t)F(t, \lambda)y_0(t)\,dt$$

Разобьем эти интегралы следующим образом:

$$\int_a^x = \int_a^c + \int_c^x$$

и применим к первому интегралу оценку (14). Мы получим

$$y_0(x) = Y_0(x)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right] + Y_2(x)\,O(\lambda^{-1}) \tag{15}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $c \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > 0$.

Точно так же доказывается, что

$$y_2(x) = Y_2(x)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right] + Y_0(x)\,O(\lambda^{-1}) \tag{16}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $c \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > 0$. Равенства (14) — (16) полностью описывают асимптотическое поведение решений y_0 и y_2.

Совершенно аналогично исследуются решения $y_{\pm 1}$. Мы определяем y_1 и y_{-1} с помощью интегральных уравнений

$$y_m(x) = Y_m(x) - \int_x^b K(x, t)F(t, \lambda)y_m(t)\,dt, \quad m = 1, -1 \tag{17}$$

и исследуем решения этих уравнений точно так же, как исследовали решения уравнений (10), (11); при этом в случае решений y_1 предполагаем $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а в случае решения y_{-1} предполагаем $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. Функции Y_1 и Y_{-1} имеют нули, если λ — чисто мнимое число и $x < c$. В этом случае асимптотические формулы надо несколько видоизменить. Окончательные результаты имеют следующий вид:

$$y_1(x) = Y_1(x)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right] \tag{18}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ либо $c \leqslant x \leqslant b$, $-i\lambda > 0$.

$$y_1(x) = Y_1(x)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right] + Y_{-1}(x)\,O(\lambda^{-1}) \tag{19}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $a \leqslant x \leqslant c$, $-i\lambda > 0$.

$$y_{-1}(x) = Y_{-1}(x)[1 + O(\lambda^{-1})] \tag{20}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ либо $c \leqslant x \leqslant b$, $i\lambda > 0$.

$$y_{-1}(x) = Y_{-1}(x)[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_1(x)\,O(\lambda^{-1}) \tag{21}$$

равномерно по x, когда $\lambda \to \infty$, $a \leqslant x \leqslant c$, $i\lambda > 0$.

Равенства (14) — (16) и (18) — (21) и доказывают справедливость результата, сформулированного в начале этого пункта. С помощью более детального исследования интегральных уравнений доказывается, что $y'_m \sim Y'_m$.

Если функцию $r(x, \lambda)$ можно разложить по степеням λ^{-1}, то такое разложение возможно и для формальных решений уравнения (1). Приближения, полученные в этом пункте, можно рассматривать как главные члены формальных решений. Как это было и выше, существуют два типа формальных решений. Первый из них соответствует типу 4.2(3) и имеет вид

$$Y(x)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\,\lambda^{-n} + Y'(x)\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x)\,\lambda^{-n-1}, \tag{22}$$

где Y — решение уравнения (4), а $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ — функции от x, не зависящие от λ. Рекуррентные дифференциальные уравнения для этих функций получаются путем подстановки разложения (22) в уравнение (1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ. Это приближение было применено Лангером (1949).

Второй тип формальных решений соответствует решениям 4.2(9). Эти решения имеют вид (3), за исключением того, что вместо функции $\varphi(x)$ мы имеем функцию $\varphi(x, \lambda)$, которая зависит от λ и обладает формальным разложением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\lambda^{-n}. \tag{23}$$

В этом разложении $\varphi_0(x)$ — дифференцируемое вещественное решение уравнения 4.5(7), а функции φ_1, φ_2, ... удовлетворяют рекуррентным дифференциальным уравнениям, получае-

мым путем подстановки функции

$$\varphi'^{-1/2} Ai\,(-\lambda^{2/3}\varphi)$$

в уравнение (1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ. Такие решения были использованы Черри (1950).

Дифференциальное уравнение

$$y'' + q(x, \lambda)\,y = 0, \quad q(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\,\lambda^{2-n}$$

является более общим, чем уравнение (1), поскольку оно содержит член $q_1(x)\,\lambda$. Из-за этого члена возникают дополнительные осложнения, которые были исследованы Лангером (1949).

Обобщение этих результатов на случай комплексного переменного было предпринято Лангером (1932) и Черри (1950); случай, когда переменное x изменяется в бесконечном интервале, был исследован Черри (1950).

4.8. Равномерные асимптотические представления бесселевых функций

В заключение этой главы применим результаты предыдущего пункта к дифференциальному уравнению 4.4(3). С их помощью мы получим асимптотическое представление для $J_\lambda(\lambda x)$, справедливое при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ равномерно для всех положительных x. Эти результаты содержат результаты п. 4.4, относящиеся к функции $J_\lambda(\lambda x)$ и, кроме того, заполняют пробел, оставшийся в п. 4.4, а именно случай $b < x < a$ $(b < 1 < a)$.

Итак, применим методы предыдущего пункта к уравнению 4.4(3), для этого уравнения

$$p(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad r(x, \lambda) = \frac{1}{4x^2} \tag{1}$$

и потому точкой перехода является $x = 1$. Функция φ определяется дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi'^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \tag{2}$$

и из равенства 4.7(2) вытекает, что

$$\frac{2}{3}[-\varphi(x)]^{3/2} = \int_x^1 (t^{-2}-1)^{1/2}\,dt =$$
$$= -(1-x^2)^{1/2} + \ln\frac{1+(1-x^2)^{1/2}}{x} = -\beta(x), \quad 0 < x \leqslant 1, \quad (3)$$
$$\frac{2}{3}[\varphi(x)]^{3/2} = \int_1^x (1-t^{-2})^{1/2}\,dt =$$
$$= (x^2-1)^{1/2} - \arccos x^{-1} = f(x), \quad 1 \leqslant x < \infty \quad (4)$$

(см. также 4.4(4) и (14)).

Так как $\varphi(x)$ является аналитической функцией и $\varphi'(x) \neq 0$, то, очевидно, функция

$$F(x) = \frac{1}{2}\{\varphi,\ x\} - r(x,\ \lambda) = \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 - \frac{1}{4x^2}$$

непрерывна на интервале $0 < x < \infty$. Для того чтобы изучить поведение функции $F(x)$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$ используем формулу для производной Шварца от сложной функции. Она имеет вид

$$\{\varphi,\ x\} = \{\varphi,\ u\}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \{u,\ x\}.$$

Положим в этой формуле $u = \beta$ при $x < 1$ и $u = f$ при $x > 1$. Простое вычисление показывает, что

$$F(x) = \frac{5\beta'^2}{18\beta^2} + \frac{1}{2}\{\beta,\ x\} - \frac{1}{4x^2} = \frac{5\beta'^2}{18\beta^2} - \frac{4+x^2}{4(1-x^2)^2},$$
$$0 < x < 1,$$
$$F(x) = \frac{5f'^2}{18f^2} - \frac{4+x^2}{4(1-x^2)^2}, \quad 1 < x < \infty.$$

Из (3) и (4) вытекает

$$\beta = O(\ln x), \quad \beta' = O(x^{-1}), \quad x \to 0,$$
$$f = O(x), \quad f' = O(1), \quad x \to \infty,$$

а потому

$$F(x) = O[(x\ln x)^{-2}], \quad x \to 0,$$
$$F(x) = O(x^{-2}), \quad x \to \infty. \quad (5)$$

Кроме того, как и в п. 4.7, получаем неравенство

$$\left|\frac{Y_0(t)}{Y_0(x)}K(x,\ t)\right| \leqslant \frac{C}{|\lambda|\,|\varphi'(t)|\,|\varphi(t)|^{1/2}} = \frac{C}{|\lambda|}\left|\frac{t^2}{1-t^2}\right|, \tag{6}$$

теряющее силу вблизи нулей функции $Y_0(x)$.

Мы видим, таким образом, что точку $x=0$ можно принять в качестве постоянного предела в интегральном уравнении для $z_0(x)$. Из соотношений (5) и (6) вытекают оценки для ядра этого уравнения, которые показывают, что это ядро интегрируемо на интервале $(0, \infty)$. Несмотря на то, что $x=0$ является особой точкой дифференциального уравнения, можно применить метод п. 4.7. При $m=0$ справедливо уравнение 4.7(14); при этом, так как из соотношений (5) и (6) вытекает, что

$$\int_0^x \left|\frac{Y_0(t)}{Y_0(x)}K(x,\ t)\,F(t)\right| dt = O\left(\int_0^x \frac{dt}{t\,(\ln t)^2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad x \to 0,$$

то при малых значениях x член $O(\lambda^{-1})$ 4.7(14) можно заменить более точным выражением

$$O\left(\frac{1}{\lambda \ln x}\right). \tag{7}$$

Мы получаем, таким образом, что у дифференциального уравнения 4.4(3) существует решение $y_0(x)$, для которого равенство

$$y_0(x) = \varphi'^{\,-1/2}\,Ai\,(-\lambda^{2/3}\varphi)\,[1+O(\lambda^{-1})] \tag{8}$$

выполняется при $0<x<\infty$, $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, за исключением случая, когда $x>1$ и λ — положительное вещественное число; в этом случае надо несколько изменить вид остаточного члена. При $0<x\leqslant b<1$ остаточный член можно заменить более точным выражением (7).

Для того чтобы выразить y_0 через бесселевы функции, положим в равенстве (8) $0<x\leqslant b<1$; тогда $\varphi(x)\leqslant\varphi(b)<0$, функцию Эйри можно заменить асимптотическим представлением 4.6(11), O-член можно заменить более точным выражением (7), и мы получим

$$y_0(x) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6}\varphi'^{\,-1/2}(-\varphi)^{1/4}e^{\lambda\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda \ln x}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6}\alpha e^{\lambda\beta}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda \ln x}\right)\right], \qquad 0<x\leqslant b<1,$$

где α — функция, определенная формулой 4.4(5). Сравнивая это выражение с 4.4(6) и 4.4(13), получаем

$$J_\lambda(\lambda x) = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-\lambda} \lambda^{\lambda+1/6} x^{1/2} y_0(x), \qquad 0 < x < \infty.$$

Следовательно,

$$J_\lambda(\lambda x) = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-\lambda} \lambda^{\lambda+1/6} (x\varphi')^{-1/2} Ai(-\lambda^{2/3}\varphi)\,[1+O(\lambda^{-1})]. \quad (9)$$

Для этого равенства справедливы те же замечания, касающиеся остаточного члена, что и в равенстве (8). Применяя к $\Gamma(\lambda+1)$ формулу Стирлинга, можно представить этот результат в упрощенной, но ослабленной форме

$$J_\lambda(\lambda x) = \left(\frac{1}{2}\lambda^{2/3} x\varphi'\right)^{-1/2} Ai(-\lambda^{2/3}\varphi)\,[1+O(\lambda^{-1})]. \quad (10)$$

Это равенство имеет место равномерно по x, $0 < x < \infty$, когда $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, причем остаточный член надо несколько изменить вблизи нулей функции $Ai(-\lambda^{2/3}\varphi)$. Заметим, что в формуле (10) остаточный член содержит остаточный член формулы Стирлинга и не может быть уточнен при малых значениях x.

Полученный результат содержит в качестве частного случая формулу 4.4(1). Покажем, что равенство (10) содержит в качестве частного случая и формулу, получаемую суммированием обеих формул 4.4(2). Предположим, что $x \geqslant a > 1$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(a) > 0$ и применим 4.6(12). Мы получаем

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \left(\frac{1}{2}\pi\lambda x\right)^{-1/2} \varphi'^{-1/2} \varphi^{-1/4} \cos[\lambda f(x) - \pi/4],$$
$$1 < a \leqslant x < \infty,$$

или

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \left(\frac{1}{2}\pi\lambda x\right)^{-1/2} \alpha(x) \cos[\lambda f(x) - \pi/4],$$
$$1 < a \leqslant x < \infty,$$

что согласуется с формулами 4.4(2).

Основной результат этого пункта (9) был распространен на комплексные значения x Черри (1948), который получил также приближения высшего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1933.

Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, перев. с англ., 1949.

Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1951.

Морс Ф. М и Фешбах Г., Методы теоретической физики т. II, перев. с англ., 1960.

Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 4-е изд., Москва, 1952.

Birkhoff G. D., Trans. Amer. Math. Soc. 9, 219—231 and 380—382, 1908.

Cherry T. M., J. London Math. Soc. 24, 121—130, 1948.

Cherry T. M., Trans. Amer. Math. Soc. 68, 224—257, 1950.

Horn Jakob, Math. Ann. 52, 271—292 and 340—362, 1899.

Jeffreys Harold, Proc. London Math. Soc. (2) 23, 428—436 1923.

Jeffreys Harold, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49, 601—611, 1953.

Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc. 34, 447—480, 1932.

Langer R. E., Bull. Amer. Math. Soc. 40, 545—582, 1934.

Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc. 37, 397—416, 1935.

Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc. 67, 461—490, 1949.

Miller J. C. P., The Airy integral. Cambridge, 1946.

Tamarkin J. D., Math. Z. 27, 1—54, 1928.

Trjitzinsky W. J., Acta Math. 67, 1—50 1936.

Trjitzinsky W. J., Bull. Amer. Math. Soc. 44, 208—222, 1938.

Turrittin H. L., Amer. J. Math. 58, 364—376, 1936.

Turrittin H. L., Contributions to the theory of non-linear oscillations, v. II. Ann. of Math. Study, no. 29, 81—115, 1952.

Wasow Wolfgang, Introduction to the asymptotic theory of ordinary linear differential equations, Working paper. National Bureau of Standards, 1953.

См. также:

Asymptotic solutions of differential equations with turning points. Review of the literature. Technical Report I, Contract Nonr—220 (11), Reference no. NR 043—121. Department of Mathematics California Institute of Technology, 1953.